

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler

Redactor: R. Sängner

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

BUSCH, G.: Elektronenleitung in Nichtmetallen (Fortsetzung und Schluß) . . . . .	81
STIEFEL, E., und ZIEGLER, H.: Natürliche Eigenwertprobleme . . . . .	111
EPPRECHT, G.W.: Measurements of Electric Dipole Moments by a Microwave Resonance Method . . . . .	138

### *Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves*

GASSMANN, F.: Elastische Wellen in porösen Medien. . . . .	144
SCHILT, H.: Das Bestimmen von Linienintegralen mit Hilfe eines Integrphen . . . . .	145

### *Varia - Miscellaneous - Divers*

Professor Dr. L. Prandtl . . . . .	147
Wissenschaftliche Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 16. bis 19. April 1950 in Darmstadt . . . . .	147
International Conference on Semi-Conductors in Reading (Great Britain) . . . . .	147
The International Congress of Mathematicians, Cambridge (Mass., U.S.A.), 1950 . . . . .	148
Union Radio-Scientifique Internationale (U.R.S.I.) . . . . .	148
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques. . . . .	148

ZAMP

Vol. I

Fasc. 2

Pag. 81-152

15. 3. 50

Verlag Birkhäuser, Basel / Schweiz

AI  
37

3.322 Kupferoxydul  $\text{Cu}_2\text{O}$ 

Aus den Arbeiten von v. AUWERS [16], DÜNWALD und WAGNER [47], GUDDEN [61], GUNDERMANN, HAUFFE und WAGNER [64], LE BLANC und SACHSE [90] und WAIBEL [128] geht mit Sicherheit hervor, daß die Leitfähigkeit des Kupferoxyduls mit steigendem Sauerstoffüberschuß, d.h. Kupfermangel, zunimmt. ENGELHARD [49] untersuchte Leitfähigkeit und Hall-Effekt unterhalb Zimmertemperatur an Kupferproben, welche durch Oxydation in

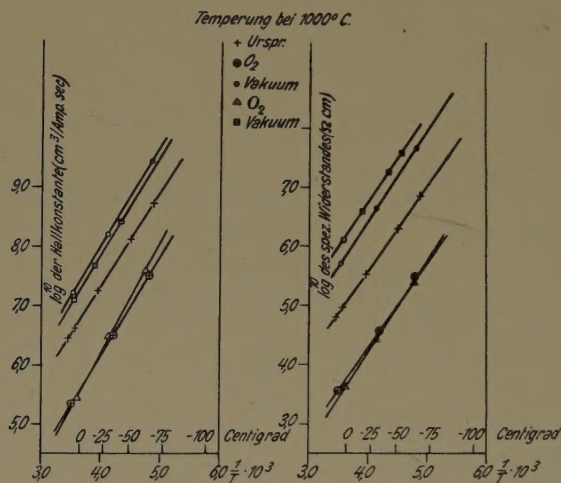


Fig. 14 und Fig. 15

Hall-Konstante und spezifischer Widerstand des  $\text{Cu}_2\text{O}$  bei tiefen Temperaturen.

(Nach ENGELHARD.)

$\text{Cu}_2\text{O}$  übergeführt wurden. Durch Tempern in Sauerstoff bzw. im Vakuum zwischen 500 und 1000°C wurde die O-Konzentration variiert. Die Figuren 14 und 15 zeigen das Wesentliche seiner Messungen. Die Leitfähigkeit läßt sich in der üblichen Form

$$\sigma = A e^{-\Delta E/(2kT)}$$

darstellen. Das Vorzeichen der Hall-Konstanten ist positiv und bestätigt, daß  $\text{Cu}_2\text{O}$  ein Mangel- oder Löcherleiter ist. Für die Aktivierungsenergien ergeben sich Werte zwischen 0,232 und 0,390 eV. Im allgemeinen liefert Oxydation höhere, Reduktion tiefere Werte. Besonders stark hängt die Mengenkonstante  $A$  von der Vorbehandlung ab. Die Donatorenkonzentration, die für eine Probe zu  $n_A = 1,4 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  berechnet wurde, erhöhte sich durch Tempern in Sauerstoff auf  $3,4 \cdot 10^{19}$  und sank durch Tempern in Vakuum auf  $5,4 \cdot 10^{17}$ . Dieses Verhalten ist mit den theoretischen Vorstellungen durchaus im Einklang.



Aus der Leitfähigkeit  $\sigma$  und den Hall-Konstanten  $R$  ergibt sich die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit, die in Fig. 16 dargestellt ist. Nach FRÖHLICH und MOTT [58] läßt sich die experimentelle Kurve mit der theoretischen Formel (26) gut in Übereinstimmung bringen mit einer charakteristischen Temperatur  $\Theta = 280^\circ$  und einer effektiven Elektronenmasse  $m^* = 0,25 m_0$ .

DÜNWALD und WAGNER sowie JUSÉ und KURT-SCHATOW [83] untersuchten das Temperaturgebiet zwischen 100 und  $1000^\circ\text{C}$ . Nach JUSÉ und KURT-SCHATOW wird die Leitfähigkeit durch eine zweigliedrige Formel

$$\sigma = A_1 e^{-\Delta E_1/(2 k T)} + A_2 e^{-\Delta E_2/(2 k T)}$$

gut wiedergegeben. Die Konstanten  $A_1$  und  $\Delta E_1$  zeigen keinerlei Abhängigkeit von der O-Konzentration und ergeben sich zu  $A_1 = 44 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ ;  $\Delta E_1 = 0,72 \text{ eV}$ . Dagegen variiert  $\Delta E_2$  zwischen 0,129 und 0,134 eV, und  $A_2$  steigt mit zunehmender O-Konzentration von  $4 \cdot 10^{-3}$  auf  $0,4 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ . Die Autoren schließen daraus, daß bei tiefen Temperaturen Mangelleitung, bei hohen dagegen Eigenleitung wirksam ist. Dementsprechend wäre zu erwarten, daß mit steigender Temperatur infolge der gegenüber der Löcherkonzentration rascher wachsenden Elektronenzahl die Hall-Konstante stets kleinere positive Werte annimmt und schließlich ihr Vorzeichen wechselt. Tatsächlich ist dieses Verhalten von SCHOTTKY und WAIBEL [113] gefunden, in einer späteren Arbeit [114] aber widerrufen worden.

Neuere Messungen stammen von ANGELLO [14] und FELDMANN [52]. ANGELLOS Messungen umfassen wieder einen kleinen Temperaturbereich zwischen  $-40$  und  $100^\circ\text{C}$  und lassen deshalb natürlich keine weiteren Schlüsse zu. Fig. 17 ist der Arbeit von FELDMANN entnommen. Oberhalb  $400^\circ\text{C}$  zeigt sich ein Verhalten ähnlich dem von JUSÉ und KURT-SCHATOW gefundenen. Die Steilheit des geradlinigen Astes ergibt sich für alle Proben, unabhängig von der Vorbehandlung, zu  $\Delta E = 0,78 \text{ eV}$ , was mit früheren Messungen befriedigend übereinstimmt. Dieser Wert ist nach FELDMANN jedoch nicht identisch mit der Aktivierungsenergie  $\Delta E_A$  für einen Mangelleiter, sondern muß anders interpretiert werden. Als Donatoren wirken im  $\text{Cu}_2\text{O}$  unbesetzte Plätze im Cu-Teilgitter. Nach DÜNWALD und WAGNER erfolgt die Diffusion der Cu-Ionen so rasch, daß, entgegen dem Verhalten des  $\text{ZnO}$ , der Fehlordnungsgrad einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand entspricht. In diesem Falle steigt

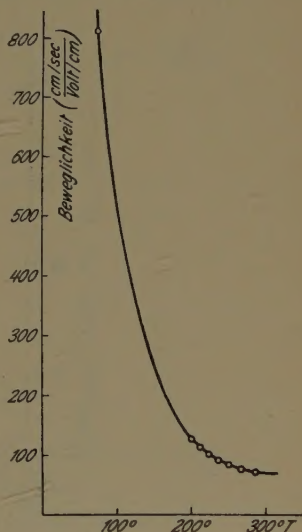


Fig. 16  
Temperaturabhängigkeit der  
Löcherbeweglichkeit im  $\text{Cu}_2\text{O}$ .  
(Nach ENGELHARD.)

die Konzentration  $n_A$  der Akzeptoren mit wachsender Temperatur und steigendem äußeren Sauerstoffdruck  $p$ , und zwar gilt nach WAGNER [127]:

$$n_A = \text{const } T^{-5/8} p^{1/4} e^{-E_f/(kT)}. \quad (42)$$

Dabei ist  $E_f$  die Energie, welche nötig ist, um eine Fehlstelle zu erzeugen, d.h.  $2 E_f$  der nötige Energiebetrag, um ein O-Atom am  $\text{Cu}_2\text{O}$ -Gitter anzulagern und

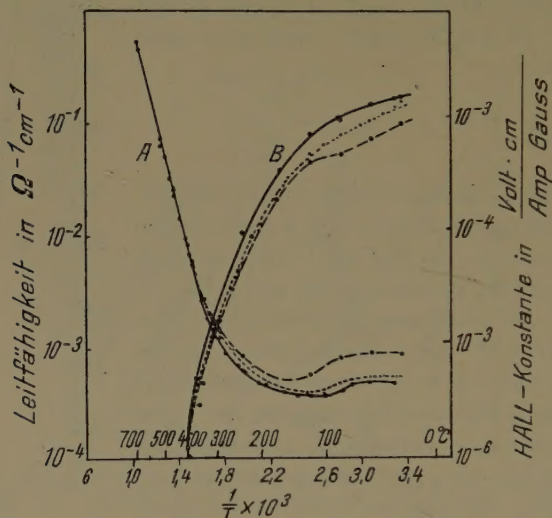


Fig. 17

Elektrische Leitfähigkeit (Kurve A) und Hall-Konstante (Kurve B) des  $\text{Cu}_2\text{O}$  bei hohen Temperaturen.  
(Nach FELDMANN.)

zwei Leerstellen im Cu-Ionengitter zu schaffen. Nach (15) ist die Zahl der Löcher

$$n_L = \text{const } T^{3/4} n_A^{1/2} e^{-\Delta E_A/(2kT)}, \quad (43)$$

so daß sich für die Leitfähigkeit, unter Berücksichtigung von (23), ein Gesetz von der Form

$$\sigma = \text{const } p^{1/8} T^{-1/16} l e^{-(E_f + \Delta E_A)/(2kT)} \quad (44)$$

ergibt, wo  $l$  wie üblich die freie Weglänge bedeutet. Aus der Steilheit des geradlinigen Astes der Kurve A in Fig. 17 ergibt sich daher nicht die Aktivierungsenergie  $\Delta E_A$ , sondern die Summe  $E_f + \Delta E_A$ . Hierfür findet man den oben angegebenen Betrag von 0,78 eV. Der wahre Wert der Aktivierungsenergie kann daher erheblich kleiner sein.

Die nach (44) zu erwartende Abhängigkeit der Leitfähigkeit oberhalb  $400^\circ\text{C}$  vom O-Druck ist schon von DÜNWALD und WAGNER bestätigt worden, wie aus Fig. 18 hervorgeht. Daraus muß geschlossen werden, daß im  $\text{Cu}_2\text{O}$ , entgegen früheren Ansichten, bei hohen Temperaturen *keine* Eigenleitung eintritt. Erneute Messungen des Hall-Effektes durch FELDMANN scheinen damit im Einklang zu stehen, indem kein Vorzeichenwechsel der Hall-Konstanten gefunden

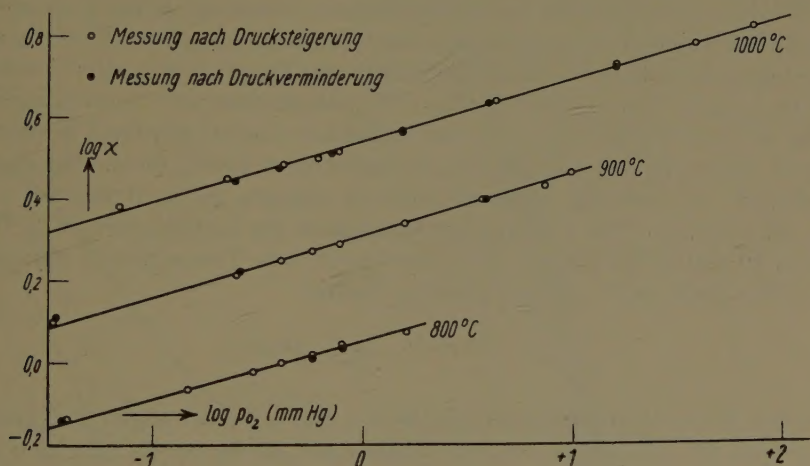


Fig. 18

Elektrische Leitfähigkeit des  $\text{Cu}_2\text{O}$  als Funktion des Sauerstoffdrucks.  
(Nach DÜNWALD und WAGNER.)

wird. Immerhin ist es schade, daß oberhalb  $400^\circ\text{C}$  offenbar keine Messungen des Hall-Effektes mehr gemacht worden sind (Fig. 17, Kurve B), denn der Vorzeichenwechsel wurde von früheren Autoren erst bei  $500^\circ\text{C}$  gefunden.

Die Beweglichkeit der Löcher  $b_L$  ist außerordentlich stark temperaturabhängig, und zwar ist unterhalb  $150^\circ\text{C}$   $b_L \sim T^{-5}$ , oberhalb  $150^\circ\text{C}$   $b_L \sim T^{-7}$ .

Unterhalb  $300^\circ\text{C}$  friert die Fehlordnung ein, d.h. die Zahl der Akzeptoren,  $n_A$  ist unabhängig von der Temperatur und hängt nur ab von der Vorgeschichte, wie ENGELHARD beobachtete. Obschon die Messungsergebnisse von ENGELHARD und von FELDMANN bei Zimmertemperatur einigermaßen übereinstimmen, liegen bis heute keine zuverlässigen zusammenhängenden Messungen über tiefe und hohe Temperaturen vor, die für eine restlose Abklärung des Leitungsmechanismus im  $\text{Cu}_2\text{O}$  unbedingt notwendig wären.

### 3.323 Siliziumkarbid $\text{SiC}$

Versuche zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit des Siliziumkarbids ( $\text{SiC}$ ) sind von SEEMANN [119], SEARS und BECKER [117], VOELKL [125],



GUILLERY [62], KURTSCHATOW, KOSTINA und RUSINOW [86], OSTERBERG [105], HENNINGER [68], BOSE und KASTGIR [25] und in neuerer Zeit von BUSCH [32] sowie BUSCH und LABHART [36] unternommen worden. Die älteren Messungen erstrecken sich teils über sehr kleine Temperaturbereiche, teils wurden die Meßergebnisse durch die hochisolierenden Sperrschichten an der Oberfläche des SiC stark gestört. BUSCH untersuchte die Leitfähigkeit an umfangreichem, einkristallinem Material mittels Sonden zwischen 77 und 1400° K.

SiC ist ein Valenzkristall mit wurzitähnlicher Struktur. Jedes Si-Atom ist von vier C-Atomen in Form eines regulären Tetraeders umgeben. Die technisch hergestellten Kristalle sind durch Einschlüsse von Fremdatomen sehr verschiedenartig gefärbt. Reines SiC ist farblos [77], mit zunehmender Verunreinigung werden die Kristalle gelblich, grün und schließlich schwarz glänzend. Spektralanalysen haben ergeben, daß gelbliche Kristalle bis zu 0,01% Fe und Mg, grüne bis zu 0,05% Fe und Mg, schwarze Kristalle dagegen 0,2% Al und Ca und 0,1% Mg enthalten. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ist in den Figuren 19 und 20 dargestellt. Für hinreichend tiefe Temperaturen läßt sich die Leitfähigkeit durch eine zweigliedrige Formel

$$\sigma = A_1 e^{-\Delta E_1/(2kT)} + A_2 e^{-\Delta E_2/(2kT)}$$

darstellen. Hall-Effekt-Messungen von BUSCH und LABHART zeigen, daß gelbes und grünes SiC ein *n*-Typ, d.h. ein Überschuß-, schwarzes SiC dagegen ein *p*-Typ, d.h. ein Mangelleiter ist.

Für *n*-SiC schwanken die Leitfähigkeiten bei 0°C zwischen  $10^{-12}$  für fast farblose und ca.  $5 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$  für dunkelgrün gefärbte Kristalle. Für die Aktivierungsenergien  $\Delta E_1$  bzw.  $\Delta E_2$  ergeben sich Werte zwischen 1,57 und 0,157 bzw. 0,191 und 0,051 eV. Die Mengenkonzanten  $A_1$  und  $A_2$  liegen zwischen 6,3 und  $260 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$  bzw. 0,3 und  $10 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ . Die entsprechenden Wertebereiche für *p*-SiC sind bedeutend enger. Für  $\sigma_{0^\circ\text{C}}$  wurden Werte zwischen  $6,2 \cdot 10^{-1}$  und  $1,80 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$  gefunden. Die Schwankungsbereiche der übrigen Größen sind:  $\Delta E_1$ : 0,226–0,281 eV,  $\Delta E_2$ : 0,038–0,052 eV,  $A_1$ : 160–350  $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ,  $A_2$ : 0,18–0,95  $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ .

Bei hohen Temperaturen zeigen sich ausgeprägte Leitfähigkeitsmaxima, die für *n*-SiC zwischen 480 und 1100° K, für *p*-SiC zwischen 950 und 1020° K gefunden worden sind. Oberhalb dieser Temperaturen nimmt die Leitfähigkeit bis zu den höchsten Meßtemperaturen von 1400° K mit steigender Temperatur ab. In allen Fällen ergab sich eine völlig exakte Reproduzierbarkeit der Meßwerte an ein und demselben Kristall. Stundenlanges Erhitzen bis 1000°C in Luft hatte keinerlei Einfluß auf die Ergebnisse, so daß die Fehlordnung zweifellos als «eingefrorener» Gleichgewichtszustand betrachtet werden kann.

Da SiC homöopolare Bindung besitzt, sollte die Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen durch ein Gesetz von der Form (30) darstellbar sein, die auf

einer Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit nach (29), d.h.  $b \sim T^{-3/2}$  beruht. Aus (30) läßt sich bei bekannter, d.h. aus dem Experiment bestimmter Aktivierungsenergie  $\Delta E$  die Temperatur  $T_{max}$  bestimmen, bei welcher das Maximum der Leitfähigkeit zu erwarten wäre. Auf diese Weise ergeben sich jedoch Temperaturen, die 5–10mal zu hoch liegen! Eine Übereinstimmung könnte zwar durch eine bedeutend stärkere Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit erzwungen werden. Es zeigt sich jedoch, daß dies nicht angängig ist.

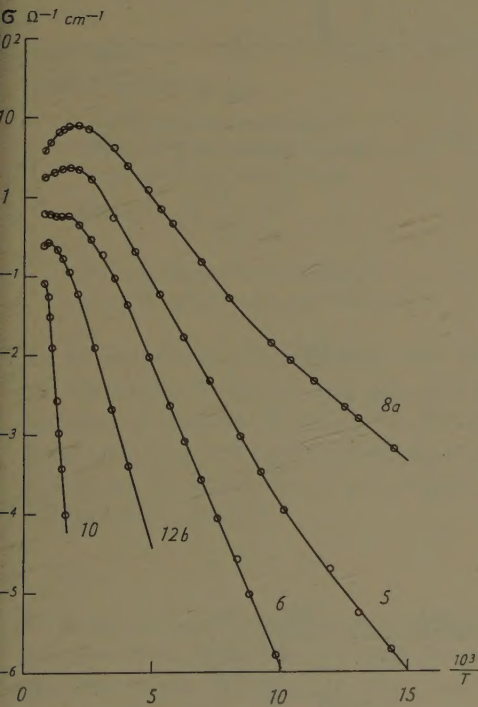


Fig. 19  
Elektrische Leitfähigkeit des *n*-SiC als Funktion der Temperatur. (Nach Busch.)

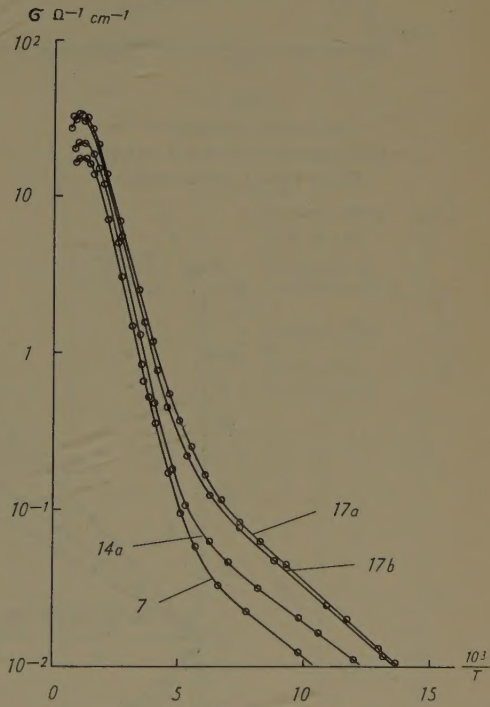


Fig. 20  
Elektrische Leitfähigkeit des *p*-SiC als Funktion der Temperatur. (Nach Busch.)

Die übliche Kombination von Leitfähigkeit und Hall-Konstanten ergab die in der Fig. 21 und 22 dargestellte Temperaturabhängigkeit von  $R\sigma$ . In der Fig. 23 ist das Produkt  $R\sigma$  versuchsweise als Funktion von  $T^{-3/2}$  aufgetragen, und es zeigt sich, daß für hohe Temperaturen die später von SEITZ theoretisch begründete Abhängigkeit tatsächlich gilt. Der Grund für die niedrigen Temperaturen, bei denen die Leitfähigkeitsmaxima liegen, kann daher nicht in einer stärkeren Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit liegen, sondern muß

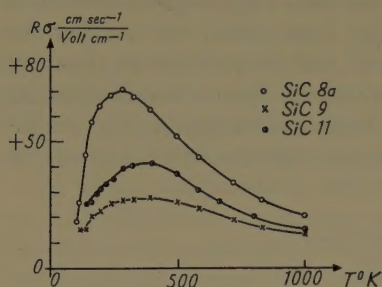


Fig. 21

Temperaturabhängigkeit der  
Elektronenbeweglichkeit im *n*-SiC.  
(Nach BUSCH und LABHART.)

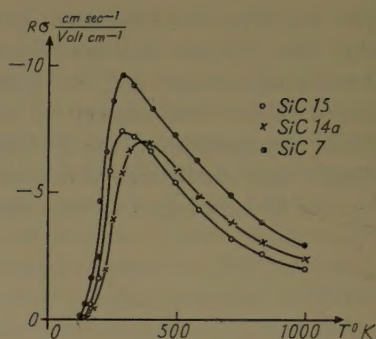


Fig. 22

Temperaturabhängigkeit der  
Löcherbeweglichkeit im *p*-SiC.  
(Nach BUSCH und LABHART.)

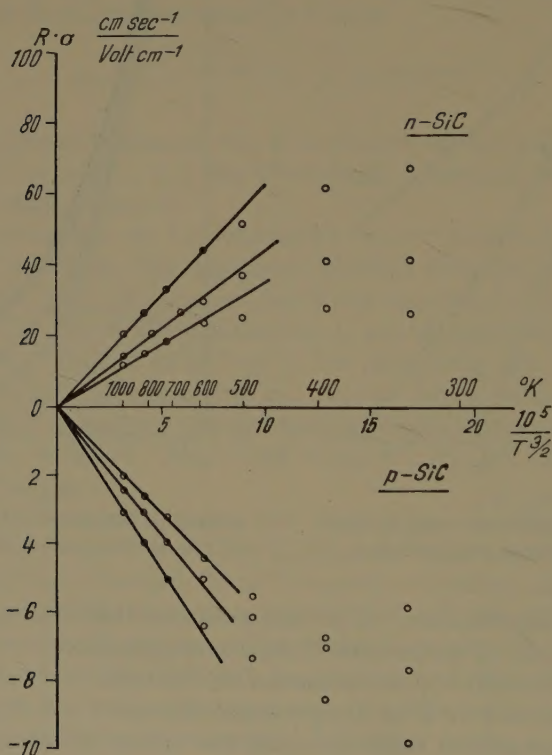


Fig. 23

$T^{-3/2}$ -Gesetz der Beweglichkeit im SiC.



auf einer geringeren Zunahme der Elektronenkonzentration mit steigender Temperatur beruhen, als nach der Maxwell-Boltzmannschen Statistik erwartet wird. Tatsächlich ergeben sich für hohe Temperaturen Elektronenkonzentrationen von  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$  für  $n$ -SiC und  $4 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  für  $p$ -SiC. Diese Elektronenkonzentrationen sind schon so hoch, daß mit beginnender Entartung gerechnet werden muß. Die konsequente Durchführung der in 2.3 erläuterten Ansätze für ein schwach entartetes Elektronengas führt auf einen Ausdruck für die Leitfähigkeit bei mittleren und hohen Temperaturen von der Form

$$\sigma = Q^* \frac{T^{-3/2}}{1 + [1 + 4 (D^*/n_D) T^{-3/2} e^{\Delta E/(kT)}]^{1/2}}. \quad (45)$$

Dabei bedeuten

$$Q^* = 2 \frac{e^2}{m^*} \tau_0 n_D; \quad \tau_0 = \bar{\tau} T^{3/2}$$

$$D^* = \left( \frac{m^* k}{2^{1/3} \pi \hbar^2} \right)^{3/2}.$$

$\bar{\tau}$  = mittlere Relaxationszeit,  
 $n_D$  = Konzentration der Störstellen.

Es ist leicht ersichtlich, daß für tiefe Temperaturen der Ausdruck (45) genau in das Gesetz von WILSON (30) übergeht. Für sehr hohe Temperaturen ergibt sich dagegen eine Abnahme der Leitfähigkeit mit steigender Temperatur, nämlich

$$\sigma \sim T^{-3/2}.$$

Zu einer analogen Temperaturabhängigkeit gelangte MÖGLICH [98] auf Grund der Formel von SAHA. Wie Fig. 24 zeigt, werden die experimentellen Ergebnisse bei hohen Temperaturen durch (45) sehr gut wiedergegeben. Bei tiefen Temperaturen zeigen die Leitfähigkeitskurven, besonders für  $p$ -SiC, charakteristisch flach verlaufende Äste mit sehr kleinen Aktivierungsenergien. Gleichzeitig nehmen die Beweglichkeiten mit sinkender Temperatur stark ab (Fig. 21 und 22). Dieses Verhalten kann nach

BUSCH und LABHART dadurch erklärt werden, daß im SiC zwei Arten von Störstellen mit verschiedenen Aktivierungsenergien wirksam sind. Die starke Ab-

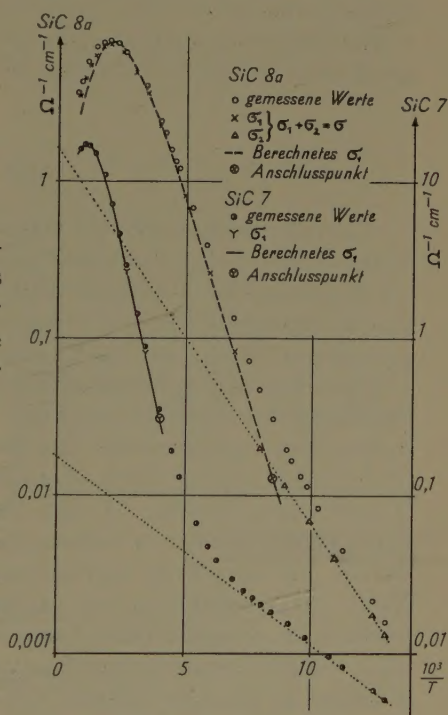


Fig. 24

Gemessene und nach (45) berechnete Leitfähigkeit im Gebiet schwacher Entartung für SiC. (Nach BUSCH und LABHART.)

nahme der Beweglichkeit mit sinkender Temperatur wurde darauf zurückgeführt, daß die Störstellen der einen Art infolge ihrer hohen Konzentration ( $10^{18}$  bis  $10^{20}$  pro Kubikzentimeter) in Wechselwirkung miteinander treten und Elektronen austauschen können. Dadurch käme eine zusätzliche Leitungszone mit sehr großen effektiven Massen und damit kleinen Beweglichkeiten zustande.

Nach neuesten Gesichtspunkten ist es jedoch auch denkbar, daß die Abnahme der Beweglichkeit bei tiefen Temperaturen auf eine Zunahme der Streuwahrscheinlichkeit durch Verunreinigungen des SiC-Gitters zurückzuführen ist. In diesem Falle wäre mit der durch Gleichung (29) gegebenen Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit zu rechnen.

SiC ist nach den oben beschriebenen Resultaten ein amphoterer Halbleiter. Überschuß- und Mangelleitung beruhen sehr wahrscheinlich auf demselben Mechanismus wie im Si und im Ge. Einlagerungen von Elementen, deren Wertigkeit kleiner als 4 ist (Ca, Al), erzeugen Mangelleitung (*p*-Typ); Verunreinigung durch Fe liefert ähnlich wie bei Silizium Überschußleitung (*n*-Typ).

### 3.324 Silizium Si

Über den Mechanismus der hohen elektrischen Leitfähigkeit des Si herrschte während langer Zeit Unklarheit. Gegen den metallischen Charakter sprechen die Messungen der Intensitätsverteilung im Emissionsspektrum der langwelligen Röntgenstrahlung von O'BRYAN und SKINNER [104]. Nach diesen muß geschlossen werden, daß das Energieband der Valenzelektronen voll besetzt ist und daher keine metallische Leitung verursachen kann. Auch nach den ersten Messungen von KÖNIGSBERGER und SCHILLING [85] ist Si ein nichtmetallischer Leiter. Damit scheinen aber die Untersuchungen von SEEMANN [118], SCHULZE [115] und LAUSTER [89] in Widerspruch zu stehen. Diese Autoren finden für Temperaturen zwischen  $77^\circ$  und  $1000^\circ\text{K}$  eine schwache Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit an Si-Einkristallen mit steigender Temperatur und schließen daraus auf metallische Leitfähigkeit. Demgegenüber stellten MEISSNER und VOIGT [93] ausdrücklich fest, daß an Si-Einkristallen, die sie bei  $1,2^\circ\text{K}$  untersuchten, kein metallischer Temperaturkoeffizient gefunden werden konnte. Eine völlige Klärung ist erst durch die umfangreichen Arbeiten amerikanischer Forscher an den Universitäten von Pennsylvania und Purdue, vor allem aber durch PEARSON und SHOCKLEY [107] und PEARSON und BARDEEN [106] erreicht worden.

PEARSON und BARDEEN benutzten als Ausgangsmaterial sehr reines Si mit nur etwa 0,03% Verunreinigungen, das durch Reduktion von  $\text{SiCl}_4$  mittels Zn in Form langer Kristallnadeln erhalten wurde. Dieses Material wurde durch Zusätze von 0,0005 bis 1 Gew.-% Bor bzw. 0,001 bis 1% Phosphor legiert. Entsprechend den in Abschnitt 2.42 entwickelten Vorstellungen erzeugen Zu-

sätze des dreiwertigen Bors Mangelleitung, solche von fünfwertigem Phosphor dagegen Überschußleitung. Die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit bzw. des spez. Widerstandes  $\varrho = 1/\sigma$  geht aus den Fig. 25 und 26 hervor. Es zeigt

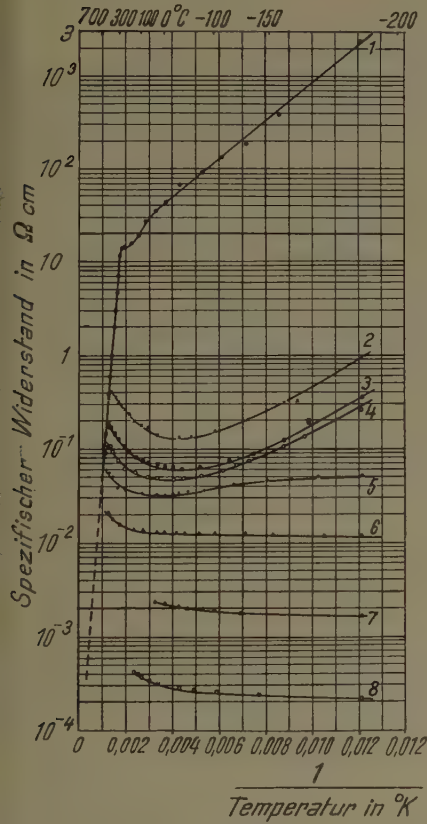


Fig. 25

Spezifischer Widerstand von Si-B-Legierungen als Funktion der reziproken Temperatur.

(Nach PEARSON und BARDEEN.)

Die Kurven entsprechen folgenden B-Zusätzen in Gewichtsprozenten: 1: 0; 2: 0,0005; 3: 0,001; 4: 0,002; 5: 0,005; 6: 0,01; 7: 0,1; 8: 1,0.

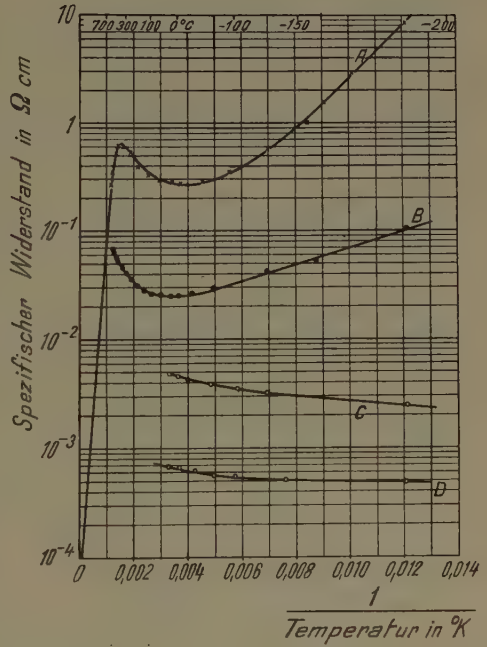


Fig. 26

Spezifischer Widerstand von Si-P-Legierungen als Funktion der reziproken Temperatur.

(Nach PEARSON und BARDEEN.)

Die Kurven entsprechen folgenden P-Zusätzen in Gewichtsprozenten: A: 0,001; B: 0,0057; C: 0,1; D: 1,0.

sich, daß für hohe Temperaturen alle Widerstandskurven, unabhängig vom Störstellengehalt der Proben, in ein und dieselbe Gerade einmünden. Dies entspricht einer *Eigenleitung* des Si mit einer Aktivierungsenergie  $\Delta E_I = 1,12$  eV. Die Leitfähigkeiten bei tiefer Temperatur wachsen dagegen in charakteristischer Weise mit zunehmender Konzentration der Beimengungen.



Durch Messung der Hall-Konstanten  $R$  wurde entsprechend den Gleichungen (32), (34) und (35) die Zahl  $n$  der Ladungsträger berechnet. Das Ergebnis zeigen die Fig. 27 und 28. Es zeigt sich, daß für kleine Konzentrationen der B-

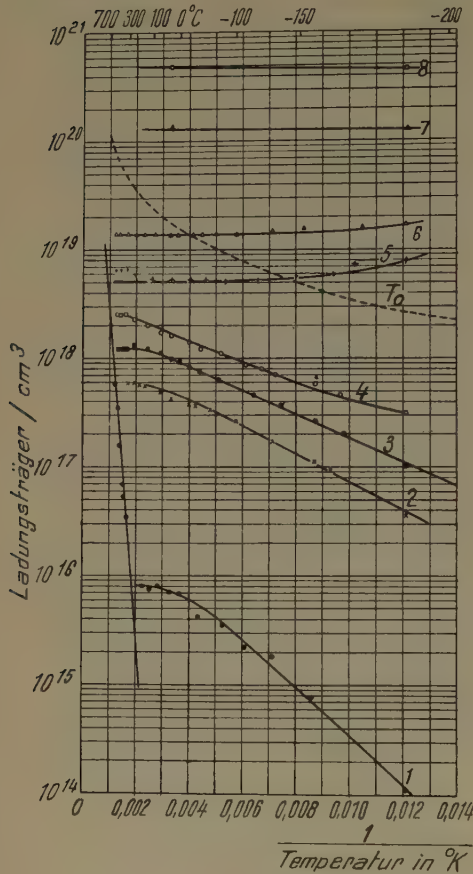


Fig. 27

Zahl der Ladungsträger pro  $\text{cm}^3$  in Si-B-Legierungen als Funktion der reziproken Temperatur.  $T_0$  ist die Entartungstemperatur. (Nach PEARSON und BARDEEN.)

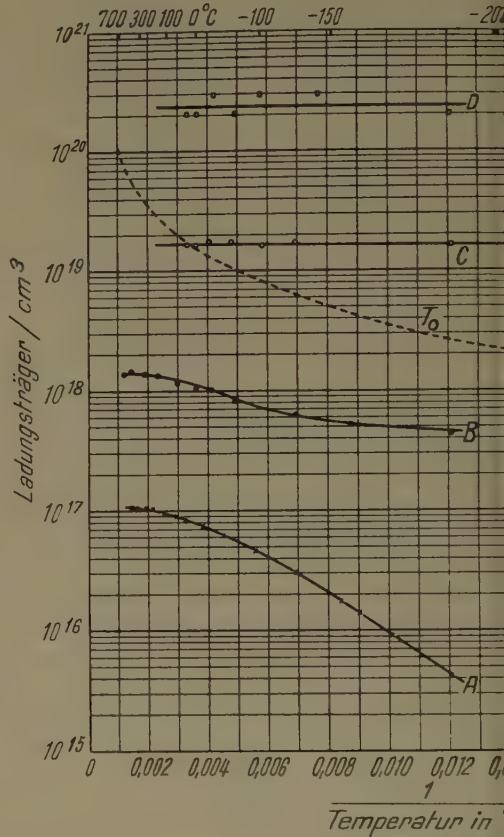


Fig. 28

Zahl der Ladungsträger pro  $\text{cm}^3$  in Si-P-Legierungen als Funktion der reziproken Temperatur.  $T_0$  ist die Entartungstemperatur. (Nach PEARSON und BARDEEN.)

bzw. P-Zusätze die Löcher- bzw. Elektronenkonzentrationen ungefähr exponentiell mit der reziproken Temperatur ansteigen. Für hohe Konzentrationen ist die Zahl der Ladungsträger dagegen sehr hoch (bis  $5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ) und praktisch unabhängig von der Temperatur. Die gestrichelte Kurve  $T_0$  stellt in beiden

Figuren die nach dem Entartungskriterium (16) gültige Abhängigkeit der Entartungstemperatur von der Konzentration der Ladungsträger dar. Die Proben 7 und 8 in Fig. 25 und C und D in Fig. 26 sind praktisch im ganzen Temperaturgebiet *entartet*.

Durch Bildung des Produktes  $R\sigma$  wurde ferner die Beweglichkeit der Ladungsträger als Funktion der Temperatur berechnet und in Fig. 29 und 30

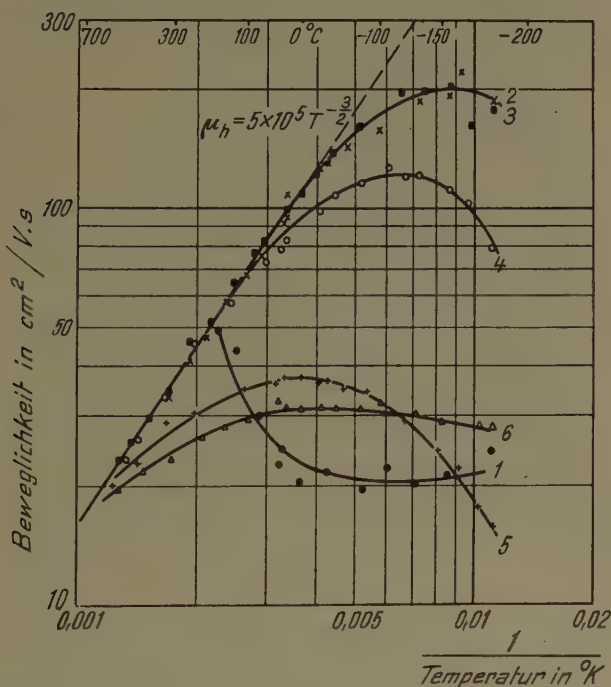


Fig. 29

Löcherbeweglichkeit als Funktion der reziproken Temperatur für Si-B-Legierungen.  
(Nach PEARSON und BARDEEN.)

in doppelt logarithmischem Maßstab als Funktion von der reziproken Temperatur aufgetragen.

Die theoretisch begründete Proportionalität der Beweglichkeit zu  $T^{-3/2}$  (vgl. Abschnitt 3.11) bei hohen Temperaturen wird, ähnlich wie für SiC, sehr schön bestätigt. Unterhalb ca.  $100^\circ\text{K}$  nimmt die Beweglichkeit mit sinkender Temperatur wieder ab, entsprechend einer Zunahme der Streuung der Ladungsträger an den Gitterstörungen (B- bzw. P-Ionen).

Im Gebiet der Störleitung wurde eine auch für andere Halbleiter charakteristische Abnahme der Aktivierungsenergie mit zunehmender Störstellen-

konzentration beobachtet. Für sehr reines Si (Probe 1) mit einer Akzeptorkonzentration  $n_A = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  ergibt sich eine Aktivierungsenergie  $\Delta E_A$  von 0,075 eV. Die Dielektrizitätskonstante des Si beträgt 13. Damit berechnet sich nach Gleichung (20), Abschnitt 2.4, eine Aktivierungsenergie  $\Delta E_A = 0,08 \text{ eV}$ , was mit dem experimentellen Wert angenähert übereinstimmt. Für die höchste

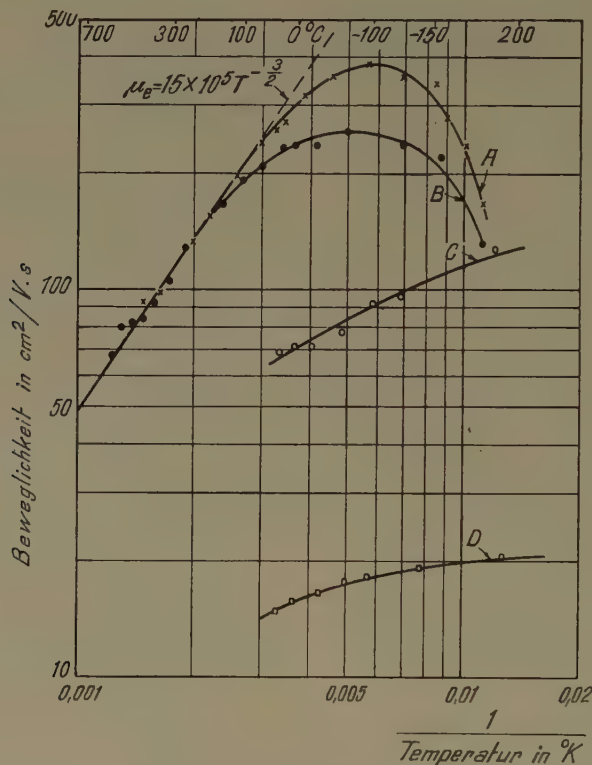


Fig. 30

Elektronenbeweglichkeit als Funktion der reziproken Temperatur für Si-P-Legierungen.  
(Nach PEARSON und BARDEEN.)

beobachtete Konzentration  $n_A = 5,3 \cdot 10^{18}$  ist die Aktivierungsenergie dagegen praktisch Null. Fig. 31 stellt den ganzen Verlauf dar. Diese Erscheinung kann nach PEARSON und BARDEEN in folgender Weise gedeutet werden. Wenn ein isoliertes Atom ionisiert wird, verschwindet das Anziehungspotential zwischen dem entstandenen Ion und dem abgetrennten Elektron. In einem Halbleiter werden jedoch die ionisierten Donatoren oder Akzeptoren durch die Leitungselektronen teilweise abgeschirmt. Dadurch entsteht im ionisierten Zustand ein



Anziehungspotential, das (negativ) um so größer wird, je kleiner der mittlere Abstand der Störstellen ist. Dieser Abstand ist proportional  $n_A^{-1/3}$ , wo  $n_A$  die Konzentration der Akzeptoren bedeutet. Die Aktivierungsenergie wird daher mit zunehmender Akzeptorkonzentration kleiner, und zwar gilt

$$\Delta E_A = \Delta E_A^0 - a n_A^{1/3}.$$

$\Delta E_A^0$  bedeutet die Aktivierungsenergie für unendliche Verdünnung der Akzeptoren und beträgt für Si auf Grund der Erfahrung etwa 0,08 eV. Damit und

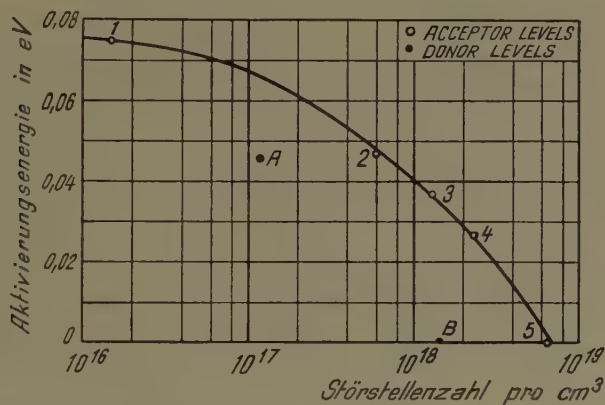


Fig. 31

Aktivierungsenergie für Si-B- und Si-P-Legierungen als Funktion der Störstellenkonzentration. (Nach PEARSON und BARDEEN.)

einem empirischen Wert  $a = 4,3 \cdot 10^{-8}$  ergibt sich die ausgezogene Kurve in Fig. 31, welche den beobachteten Gang der Aktivierungsenergie mit der Akzeptorkonzentration gut wiedergibt. Auf Grund einer quantitativen Abschätzung wird für  $a$  ein Wert von  $3 \cdot 10^{-8}$  gefunden. Die Übereinstimmung ist daher größenordnungsmäßig recht befriedigend und stützt die gegebene Erklärung.

Für sehr hohe Störstellenkonzentrationen ergeben sich neue Verhältnisse. Silizium mit mehr als 10<sup>19</sup> pro Kubikzentimeter eingelagerten B-Atomen bzw. P-Atomen besitzt eine elektrische Leitfähigkeit, die von der Temperatur praktisch unabhängig ist (Kurven 6 bis 8 in Fig. 25 bzw. Kurven C und D in Fig. 26). PEARSON und SHOCKLEY [107] fanden sogar bis zu Temperaturen von 10°K keine Änderung des spezifischen Widerstandes. Die Aktivierungsenergie ist für solche Legierungen praktisch Null, so daß die Zahl der Ladungsträger unabhängig von  $T$  gleich der Zahl der Donatoren bzw. Akzeptoren wird. Das Elektronengas ist in diesem Falle stark entartet, und die Leitfähigkeit wird außer durch die Zahl der Ladungsträger nur durch die Beweglichkeit bestimmt.

Für tiefe Temperaturen wird die Beweglichkeit nur durch die Streuung der Störstellen beschränkt.

JOHNSON und LARK-HOROVITZ [81, 82] berechneten diese Streuung für ein entartetes Elektronengas und fanden dafür völlige Temperaturunabhängigkeit. Es zeigt sich, daß in diesem Fall der spezifische Widerstand  $\varrho$  nur noch von der Störstellendichte  $n$  abhängt, die mit der Anzahl der Ladungsträger identisch ist. Für die Beweglichkeit gilt

$$\frac{1}{b} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{\pi \hbar}{4 e} n^{2/3}$$

und für den spezifischen Widerstand  $\varrho = 1/(e n b)$  folgt daraus

$$\varrho = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{\pi \hbar}{4 e^2} n^{-1/3}.$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich

$$\varrho = 6270 n^{-1/3} \Omega \text{ cm}, \quad (46)$$

was größenordnungsmäßig mit den beobachteten Werten übereinstimmt.

Das Verhalten des Siliziums als Halbleiter ist somit weitgehend abgeklärt, und die experimentellen Ergebnisse stehen in guter Übereinstimmung mit den neueren theoretischen Vorstellungen.

### 3.325 Oxyde mit Spinellstruktur

Die in Abschnitt 2.43 skizzierte Theorie von VERWEY, HAAYMAN und ROMEIJN [124] über die elektrische Leitfähigkeit von Oxyden mit Spinellstruktur wurde von denselben Autoren in der gleichen Arbeit experimentell fundiert. Sie führten Substitutionsversuche an  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  durch, indem sie Mischkristalle mit  $\text{MgCr}_2\text{O}_4$  bzw.  $\text{ZnCr}_2\text{O}_4$  herstellten. Dabei wurden nicht nur die zweiwertigen, sondern auch die dreiwertigen Ionen ausgewechselt.

Zur Herstellung der Proben wurden  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{MgO}$  und  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  bzw.  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{ZnO}$  und  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  im passenden Verhältnis innig gemischt, gepreßt und in geeigneter Atmosphäre bei 1200–1400°C gesintert. Die Kurven in Fig. 32 und Fig. 33 sind an diesem polykristallinen Material gemessen. Erwartungsgemäß wird die Leitfähigkeit mit zunehmendem Gehalt an  $\text{MgCr}_2\text{O}_4$  bzw.  $\text{ZnCr}_2\text{O}_4$  kleiner. Die Aktivierungsenergie steigt. Sehr bemerkenswert ist, daß sich hierdurch die Größe der Leitfähigkeit und die Aktivierungsenergie in weiten Grenzen verändern lassen. Diese Halbleiter sind auf kleine stöchiometrische Ungenauigkeiten nicht sehr empfindlich und können daher einigermaßen reproduzierbar hergestellt werden.

## 3.33 Meyer-Neldelsche Regel

Die Leitfähigkeit eines reinen Überschuß- bzw. Mangelleiters läßt sich für hinreichend kleine Störstellenkonzentration, d.h. solange keine Entartung eintritt, mit praktisch ausreichender Genauigkeit durch ein Gesetz von der Form

$$\sigma = A e^{-\Delta E/(2kT)} \quad (47)$$

darstellen. Die schwache Temperaturabhängigkeit der *Mengenkonstanten*  $A$  fällt neben der Exponentialfunktion meist nicht ins Gewicht. Nach MEYER

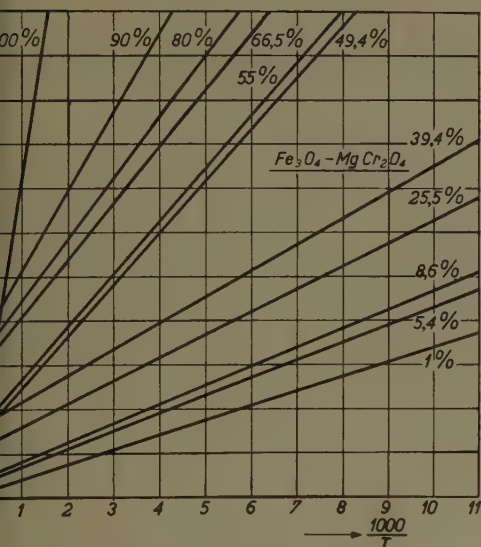


Fig. 32

Leitfähigkeit von  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ - $\text{MgCr}_2\text{O}_4$ -Mischkristallen bei verschiedenem  $\text{MgCr}_2\text{O}_4$ -Gehalt. (Nach VERWEY, HAAYMAN und ROMELIJN.)

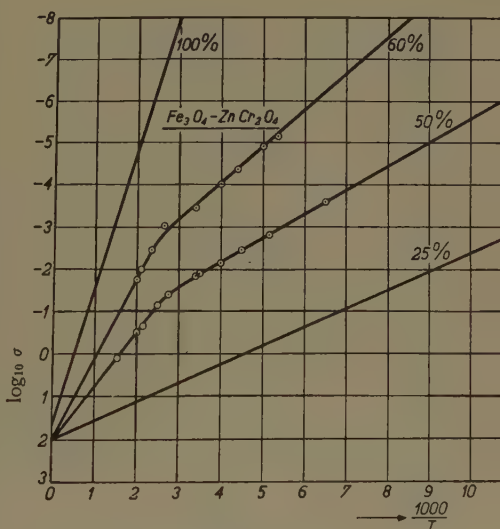


Fig. 33

Leitfähigkeit von  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ - $\text{ZnCr}_2\text{O}_4$ -Mischkristallen bei verschiedenem  $\text{ZnCr}_2\text{O}_4$ -Gehalt. (Nach VERWEY, HAAYMAN und ROMELIJN.)

und NELDEL [96] besteht nun für eine Reihe von Halbleitern, deren Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur kleiner als etwa  $10^{-2} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$  ist, ein bemerkenswerter einfacher Zusammenhang zwischen  $A$  und der Aktivierungsenergie  $\Delta E$  von der Form

$$\log A = \alpha + \beta \Delta E. \quad (48)$$

In Fig. 34 sind die Ergebnisse für  $\text{ZnO}$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{WO}_2$  nach MEYER und NELDEL, für  $\text{SiC}$  nach BUSCH [32], und für  $\text{BaTiO}_3$  nach BUSCH und FLURY [34] zusammengestellt. Die Meßpunkte liegen auf Geraden, deren Lage und Neigung für jede Substanz charakteristisch ist.



Die Mengenkonstante  $A$  ist nach (30) und (30a) proportional zur Wurzel, aus der Störstellendichte  $n_D$  bzw.  $n_A$ . Der Zusammenhang (48) sagt demnach aus, daß die Aktivierungsenergie für schlecht leitende Halbleiter mit zunehmender Störstellendichte größer wird.

Für Halbleiter, deren Leitfähigkeit bei Zimmertemperatur größer als etwa  $10^{-2} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$  ist, wird eine entgegengesetzt verlaufende Abhängigkeit, d. h.

eine *Abnahme* von  $\Delta E$  mit wachsendem  $A$  beobachtet. Die Erklärung für diesen Effekt ist offenbar in einer gegenseitigen Beeinflussung der Störstellen zu suchen, wie für den Fall des Siliziums in Abschnitt 3.324 auseinandergesetzt wurde. Die Meyer-Neldelsche Regel hat offensichtlich eine andere Ursache und kann nach BUSCH [33] in folgender Weise erklärt werden.

Solange eine halbleitende Verbindung, z. B. ein Oxyd, mit der umgebenden O-Atmosphäre thermodynamisch im Gleichgewicht steht, stellt sich nach WAGNER [127] [Gl. (42), Abschnitt 3.322] eine temperaturabhängige Störstellenkonzentration

$$n_D = C e^{-E_f/(kT)}$$

ein. Die Konstante  $C$  enthält u. a. den O-Druck und ist gegen die Exponentialfunktion nur schwach temperaturabhängig.  $E_f$  ist die Fehlordnungsenergie, d. h. der nötige Energiebetrag, um im Gitter eine Fehlstelle zu erzeugen. Nun werden aber Leitfähigkeiten an Halb-

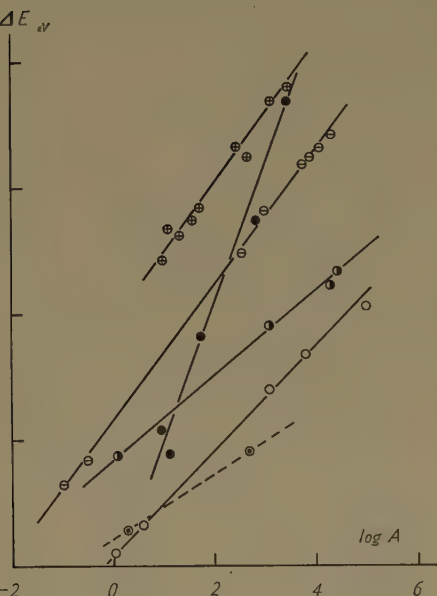


Fig. 34

Zusammenhang zwischen der Aktivierungsenergie  $\Delta E$  und der Mengenkonstanten  $A$ .  
Meyer-Neldelsche Regel.

○ ZnO; ⊙ TiO<sub>2</sub>; ● Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>; ⊕ UO<sub>2</sub>; ● SiC;  
⊕ BaTiO<sub>3</sub>.

leitern meistens bei so tiefen Temperaturen gemessen (z. B. ZnO im Gegensatz zu Cu<sub>2</sub>O!), daß die Störstellenkonzentration als *konstant* betrachtet werden kann. Dies bedeutet offenbar, daß die Fehlordnung unterhalb einer für jeden Halbleiter charakteristischen Temperatur  $\Theta$  «einfriert». Die unterhalb  $\Theta$  stabile Störstellenkonzentration richtet sich daher nach der Einfriertemperatur  $\Theta$ , d. h.

$$n_D = C e^{-E_f/(k\Theta)}. \quad (49)$$

Für einen Störhalbleiter ist die Leitfähigkeit proportional  $n_D^{1/2}$ , d. h. es gilt, ab-

gesehen von schwach temperaturempfindlichen Größen,

$$\sigma = a n_D^{1/2} e^{-\Delta E_D/(2kT)}, \tag{50}$$

d.h. mit (49)

$$\sigma = a' e^{-E_f/(2k\Theta)} e^{-\Delta E/(2kT)}. \tag{51}$$

Setzt man  $E_f + \Delta E = U$ , so ist  $U$  die für jedes Gitter charakteristische Energie, um ein Atom oder Ion des ungestörten Gitters zu ionisieren, d.h. ins Leitungsband zu heben. Durch Ersetzen von  $E_f$  in (51) folgt:

$$\sigma = a' e^{(\Delta E - U)/(2k\Theta)} e^{-\Delta E/(2kT)}. \tag{52}$$

Vergleicht man (52) mit (47), so findet man für die Mengenkonzstante

$$A = a' e^{(\Delta E - U)/(2k\Theta)}$$

und durch Logarithmieren

$$\log A = \alpha + \beta \Delta E$$

in Übereinstimmung mit der empirischen Meyer-Neldelschen Regel (48). Während  $\alpha$  in komplizierter Weise von  $U$ , dem Gasdruck, der Beweglichkeit usw. abhängt, ergibt sich für  $\beta$  der einfache Ausdruck

$$\beta = \frac{1}{2k\Theta}. \tag{53}$$

Im Diagramm  $\Delta E = f(\log A)$  (Fig. 34) verlaufen daher die Geraden um so steiler, je größer die Einfriertemperatur  $\Theta$  der betreffenden Substanz ist. Für die aus den Steilheiten berechneten Einfriertemperaturen ergeben sich folgende Werte:

Halbleiter	$\Theta$ berechnet in $^{\circ}\text{K}$	$\Theta$ geschätzt in $^{\circ}\text{K}$
$\text{UO}_2$ . . . .	(340) <sup>1)</sup>	1000 (?)
$\text{Fe}_2\text{O}_3$ . . . .	430	400
$\text{ZnO}$ . . . .	533	600
$\text{TiO}_2$ . . . .	685	700
$\text{BaTiO}_3$ . . . .	710	950
$\text{SiC}$ . . . .	1350 <sup>2)</sup>	> 2000 <sup>3)</sup>

Zum Vergleich wurden in der dritten Kolonne diejenigen Temperaturen angeführt, bei welchen durch Erhitzen in Vakuum eine merkliche Dissoziation und

1) Wert unsicher, da nur zwei Meßpunkte vorliegen.

2) Korrigierter Wert.

3) Nach Beobachtungen von F. BOSSARD, Diplomarbeit ETH., 1947 (unveröffentlicht).

damit ein Auftauen der Fehlordnung einsetzt. Diese Temperaturen sind naturgemäß sehr schlecht definiert, doch ist die Korrelation mit den berechneten Einfriertemperaturen unverkennbar. Es ist übrigens bemerkenswert, daß die Meyer-Neldelsche Regel für sehr verschiedenartige chemische Verbindungen erfüllt ist, so daß es nicht ausgeschlossen erscheint, daß ihr allgemeine Gültigkeit zukommt. Nach der gegebenen Darstellung wäre die Regel allerdings grundsätzlich auf Halbleiter mit eingefrorenen Fehlordnungen beschränkt.

GISOLF [59] hat für die Meyer-Neldelsche Regel eine völlig andere Erklärung gegeben. Sie beruht jedoch auf sehr speziellen Annahmen über die gleichzeitige Existenz von Spender- und Haftstellen und einer einschränkenden Beziehung zwischen den Beweglichkeiten und der Störstellenkonzentration, die jedoch von den bisherigen und diesem Bericht zugrunde liegenden Anschauungen erheblich abweichen. Eine Entscheidung kann wohl erst nach einer wesentlichen Vermehrung der experimentellen Tatsachen erwartet werden.

### 3.34 Zusammenhang zwischen den Dielektrizitätskonstanten und der Aktivierungsenergie

Die Aktivierungsenergie eines Störhalbleiters ist nach MOTT [6] [vgl. Gleichung (20), Abschnitt 2.4] von der effektiven Dielektrizitätskonstanten  $k_{eff}$  des Halbleiters abhängig, und zwar gilt im wesentlichen

$$\Delta E \sim \frac{1}{k_{eff}^2} \quad (54)$$

Eine hohe Dielektrizitätskonstante, d.h. eine hohe Polarisierbarkeit der Nachbarschaft einer Störstelle des Gitters hat eine kleine Aktivierungsenergie zur Folge. Obschon sich auf Grund dieses Zusammenhanges Aktivierungsenergien von richtiger Größenordnung berechnen lassen, wären systematische Untersuchungen sehr wertvoll. Solche liegen jedoch scheinbar nicht vor. Einzig HENNINGER [69] berichtet in einer kurzen Zusammenfassung von einer experimentell festgestellten Abhängigkeit der Aktivierungsenergie von der Störstellendichte und der Dielektrizitätskonstanten. Genauere Angaben über die untersuchten Substanzen, sowie Zahlenwerte, fehlen jedoch.

Mit dem Ziele, für den Zusammenhang (54) wenigstens eine qualitative Bestätigung zu finden, untersuchten BUSCH, FLURY und MERZ [35] Einkristalle von  $\text{BaTiO}_3$ . Diese Substanz ist ein Überschußleiter und ist durch ihre besonderen Eigenschaften als Ferroelektrikum bekannt.  $\text{BaTiO}_3$  zeigt einen sehr starken Gang der statischen Dielektrizitätskonstanten mit der Temperatur. Insbesondere durchläuft diese in der Nähe der Curie-Temperatur  $T_c \cong 120^\circ\text{C}$  ein sehr scharfes Maximum und erreicht dort Werte bis 10000. Zum Unterschied aller bisher bekannten Ferroelektrika zeigt auch der im sichtbaren Ge-



biet gemessene Brechungsindex ein ausgesprochenes Maximum am Curie-Punkt. Bei Zimmertemperatur beträgt  $n = 2,40$  und erreicht bei  $120^\circ\text{C}$  einen Wert von ca. 2,46. Auf Grund dieser Beobachtungen war zu erwarten, daß auch die für die Aktivierungsenergie maßgebende effektive Dielektrizitätskonstante  $k_{\text{eff}}$  einen ähnlichen Verlauf mit der Temperatur zeigt. Nach (54) müßte dem maximalen Wert von  $k_{\text{eff}}$  ein Minimalwert der Aktivierungsenergie  $\Delta E$ , d.h. eine minimale Steilheit der Leitfähigkeits-Temperatur-Kurven  $\log \sigma = f(1/T)$  entsprechen. Dieses Verhalten ist experimentell bestätigt worden. Für hohe und tiefe Temperaturen ergab sich z. B. eine Aktivierungsenergie  $\Delta E = 1,75 \text{ eV}$ , die in der Nähe des Curie-Punktes ein Minimum von  $\Delta E = 1,15 \text{ eV}$  durchläuft. Wenn auch mangels weiterer Daten eine quantitative Prüfung nicht möglich ist, scheint dadurch doch wenigstens der Versuch zu einer quantitativen Bestätigung gemacht worden zu sein.

### 3.35 Einfluß eines allseitigen Druckes auf die elektrische Leitfähigkeit

Die Änderung der elektrischen Leitfähigkeit unter der Wirkung eines allseitigen Druckes ist namentlich von BRIDGMAN [28] für Metalle untersucht worden. Für Metalle wird unter Druck sowohl Zu- wie auch Abnahme der Leitfähigkeit beobachtet. An Halbleitern liegen bis jetzt sehr wenige Messungen vor. HOLMES und ALLEN [74] beobachteten am Selen eine gegenüber Metallen starke Abnahme des spezifischen Widerstandes mit steigendem Druck und fanden eine spezifische Widerstandsänderung

$$\frac{1}{R_0} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta p} = -3,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kg}^*.$$

Eine außerordentlich starke Widerstandsänderung hat BRIDGMAN [29] am Tellur gefunden. Unter einem Druck von  $30000 \text{ kg}^*/\text{cm}^2$  steigt die Leitfähigkeit des Tellurs auf den 400fachen bzw. 600fachen Wert bei Atmosphärendruck, je nach der Orientierung der Kristalle zum elektrischen Feld. Ähnliche Ergebnisse hat auch CARTWRIGHT [39] erhalten. Nun ist Tellur nach Arbeiten von CARTWRIGHT und HABERFELD [41] sowie neueren Untersuchungen von SCANLON und LARK-HOROVITZ [111], BOTTOM [26] und JOHNSON [79] ein Halbleiter, der schon wenig oberhalb Zimmertemperatur Eigenleitung zeigt, mit einer Aktivierungsenergie  $\Delta E_1 = 0,38 \text{ eV}$ . Bei tieferen Temperaturen wurde Mangleitung beobachtet.

BRIDGMAN vertrat die Auffassung, daß mit steigendem Druck der metallische Charakter des Tellurs mehr und mehr zunimmt. Tatsächlich erleidet Tellur bei einem Druck von  $45000 \text{ kg}/\text{cm}^2$  eine Umwandlung [30]. Für die Widerstandsänderung für kleinere Drucke hat BARDEEN [18] eine sehr überzeugende

Erklärung gegeben. Mit steigendem Druck vermindert sich die Gitterkonstante des Tellurkristalls, und es ist anzunehmen, daß sich damit der energetische Abstand des höchsten voll besetzten Bandes vom Leitungsband, und damit die Aktivierungsenergie  $\Delta E_I$  für die Eigenleitung ebenfalls verringert. BARDEEN hat aus den Messungen von BRIDGMAN die Aktivierungsenergie  $\Delta E_I$  als Funktion des Drucks bestimmt. Die Berechnung beruht auf der Annahme, daß die

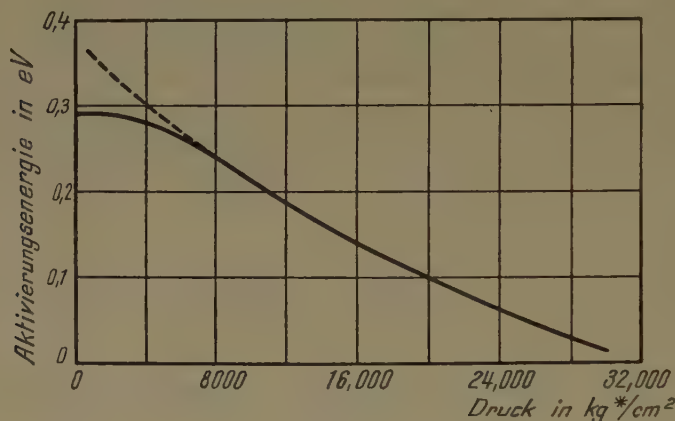


Fig. 35

Aktivierungsenergie  $\Delta E_I$  des Tellurs, berechnet aus der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes bei verschiedenen Drucken. Ausgezogene Kurve: nach Messungen von BRIDGMAN; gestrichelte Kurve: nach  $E_I = 0,38$  eV für  $p = 0$  extrapoliert.

(Nach BARDEEN.)

Leitfähigkeit mit der Temperatur wie  $\sigma = A e^{-\Delta E_I / (2 k T)}$  ansteigt. Zur Bestimmung von  $\Delta E_I$  genügen daher die Leitfähigkeiten für zwei verschiedene Temperaturen. Das Resultat ist in Fig. 35 dargestellt. Für einen Druck von ca. 30000 kg/cm² wird die Aktivierungsenergie tatsächlich sehr klein, und bei wenig höherem Druck vollzieht sich wahrscheinlich die Umwandlung in eine wahre metallische Phase durch Überlappung der Energiebänder. Daß für den Druck  $p = 0$  für  $\Delta E_I$  ein kleinerer Wert als 0,38 eV erhalten wird, kann leicht damit erklärt werden, daß bei dem von BRIDGMAN untersuchten Tellur noch eine Störleitung überlagert ist.

#### 4. Thermospannung Metall-Halbleiter

##### 4.1 Formel für die differentiale Thermospannung

Zwischen der *integralen* Thermospannung  $V_{MH}$  eines Elementes Metall-Halbleiter-Metall und dem Thomson-Koeffizienten  $\mu_M$  bzw.  $\mu_H$  des Metalls

bzw. des Halbleiters gilt die thermodynamische Beziehung

$$\frac{dV_{MH}}{dT} = \int \frac{\mu_M - \mu_H}{T} dT. \quad (55)$$

Für den Thomson-Koeffizienten liefert die Elektronentheorie<sup>1)</sup>

$$\mu = -\frac{T}{e} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{K_2}{K_1 T} - \frac{\zeta}{T} \right]. \quad (56)$$

Dabei bedeutet  $\zeta$  die Grenzenergie der Fermi-Diracschen Verteilungsfunktion, und  $K_1$  bzw.  $K_2$  stehen für die Integrale

$$K_n = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty l E^n \frac{\partial w_0}{\partial E} dE. \quad (57)$$

$E$  = Gesamtenergie des Elektrons,

$m^*$  = effektive Elektronenmasse,

$l$  = freie Weglänge,

$w_0$  = ungestörte Fermi-Diracsche Verteilungsfunktion.

Unter der Annahme einer energieunabhängigen freien Weglänge findet man leicht

$$\frac{K_2}{K_1 T} = 2k, \quad (58)$$

$k$  = Boltzmannsche Konstante,

d.h.

$$\mu = -\frac{T}{e} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left[ 2k - \frac{\zeta}{T} \right]. \quad (59)$$

Infolge der sehr schwachen Temperaturabhängigkeit der Grenzenergie der Metalle ist der Thomson-Koeffizient  $\mu_H$  des Halbleiters stets größenordnungsmäßig größer als  $\mu_M$ . Unter dieser Voraussetzung folgt aus (55) und (59) für die *differentiale* Thermospannung:

$$\frac{dV_{MH}}{dT} = \pm \frac{k}{e} \left( 2 - \frac{\zeta}{kT} \right). \quad (60)$$

Durch Einsetzen des expliziten Ausdrucks für  $\zeta$  findet man sofort die differentiale Thermospannung als Funktion der Temperatur. Für einen reinen Überschußleiter folgt z.B. unter Verwendung von (13), Abschnitt 2.2, und Berücksichtigung der negativen Ladung des Elektrons:

$$\frac{dV_{MH}}{dT} = -\frac{k}{e} \left\{ 2 - \log c n_D^{1/2} + \frac{AE_D}{2kT} \right\}, \quad (61)$$

<sup>1)</sup> Vgl. etwa F. SEITZ [8].



wo

$$c = \left( \frac{2 \pi \hbar^2}{m_2^* k T} \right)^{3/4},$$

$n_D$  = Donatorenkonzentration,  
 $\Delta E_D$  = Aktivierungsenergie.

Der absolute Betrag der Thermospannung steigt bei konstanter Temperatur mit wachsender Aktivierungsenergie und sinkender Störstellenkonzentration. Für Überschußleiter ergibt sich negatives, für Mangelleiter positives Vorzeichen. In gemischten Leitern kann die Thermospannung verschwinden. Die Temperaturabhängigkeit der Thermospannung hat im wesentlichen die Form

$$\frac{dV_{MH}}{dT} = F(T) - \frac{\Delta E_D}{2eT}. \quad (62)$$

Der erste Term  $F(T)$  ist gegenüber dem zweiten nur schwach temperaturabhängig, so daß auf Grund dieser Theorie die Thermospannung mit sinkender Temperatur ansteigen sollte.

Dieses Resultat steht nun offensichtlich in Widerspruch mit dem Nernst-schen Hauptsatz der Thermodynamik, wonach die Thermospannungen am absoluten Nullpunkt verschwinden müssen. Die Gleichung (62) kann daher höchstens für hohe Temperaturen richtig sein; für tiefe gilt sie dagegen sicher nicht. Der Grund für das Versagen liegt einerseits darin, daß die Näherungen, die zu (56) führen, bei tiefen Temperaturen wahrscheinlich unzuverlässig sind [2]. Andererseits wurde bei der Ableitung von (56) angenommen, daß der Wärmetransport, ähnlich wie bei Metallen, in überwiegendem Maße durch die Elektronen besorgt wird. Dies gilt für (nichtentartete) Halbleiter bei tiefen Temperaturen bestimmt nicht. Mit abnehmender Elektronenkonzentration wird voraussichtlich ein Zustand erreicht, in dem die Wärmeleitfähigkeit des Gitters überwiegt. An diesen Tatsachen vermögen auch die Überlegungen von HENISCH [67] nichts zu ändern, der in an sich korrekter Weise die Thermospannung als Kontaktphänomen auffaßt. Eine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist somit nur in besonders günstigen Fällen zu erwarten.

Für entartete Halbleiter ergeben sich dagegen Verhältnisse, die dem metallischen Zustand ähnlich sind. JOHNSON und LARK-HOROVITZ [80] geben eine entsprechende Formel an, welche die Beobachtungen am Germanium [87] gut wiedergeben soll.

## 4.2 Experimentelle Ergebnisse

Messungen der Thermospannung gegen Metalle liegen vor

an den *Überschußleitern*  $\text{TiO}_2$  [67];  $\text{V}_2\text{O}_5$  [54, 71];  $\text{CuO}$  [54];  $\text{ZnO}$  [22, 56];  $\text{CdO}$  [15, 22, 54, 72, 73];  $\text{WO}_3$  [71];

an den *Mangelleitern*  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  [54];  $\text{CoO}$  [71];  $\text{Co}_3\text{O}_4$  [54];  $\text{NiO}$  [22, 54, 130];  $\text{CuJ}$  [103];  $\text{Cu}_2\text{O}$  [47, 98, 110, 116, 126];  $\text{MoS}_2$  [71];  $\text{SnS}$  [12, 13];  $\text{Bi}_2\text{S}_3$  [71]; sowie an den *amphoteren Leitern*  $\text{Si}$  [53];  $\text{SiC}$  [37, 71];  $\text{Ge}$  [87];  $\text{Se}$  [24, 71];  $\text{Ti}_2\text{S}$  [71];  $\text{PbS}$  [46, 50, 91, 101];  $\text{PbSe}$  [21].

In der überwiegenden Zahl der Fälle ist die *integrale* Thermospannung für eine einzige Temperatur gemessen worden, wodurch immerhin die Größenordnung und das Vorzeichen der Thermospannungen festgelegt worden sind. Soweit als gleichzeitige Messungen des Hall-Effektes vorliegen, besteht Übereinstimmung bezüglich des Vorzeichens der Ladungsträger.

Vom experimentellen wie auch vom theoretischen Standpunkt aus besitzen Messungen der differentialen Thermospannung in einem ausgedehnten Temperaturbereich bedeutend größeres Interesse. Leider ist die Zahl derartiger Untersuchungen überraschend klein. SCHWEICKERT [116] und ROHDE [110] untersuchten das Element  $\text{Cu-Cu}_2\text{O-Cu}$  zwischen  $-80$  und  $+70^\circ\text{C}$ . In diesem Temperaturgebiet ergibt sich eine Abnahme der differentialen Thermospannung mit steigender Temperatur und eine Zunahme mit wachsender Aktivierungsenergie. Dieses Verhalten stimmt somit qualitativ mit den theoretischen Aussagen überein. Die Proportionalität zur reziproken Temperatur scheint jedoch nicht zu bestehen. Überdies zeigt sich eine auffallende Abhängigkeit der differentialen Thermospannung von der Temperaturdifferenz, die bis jetzt noch keine Erklärung gefunden hat [100].

Eine sehr gute Bestätigung des  $1/T$ -Gesetzes liefern dagegen die Messungen von WRIGHT und ANDREWS [130] am  $\text{NiO}$ . Nickeloxyd ist trotz unvollständig gefülltem 3 *d*-Band kein Metall, sondern ein Mangelleiter. WRIGHT und ANDREWS stellten gut zusammenhängende  $\text{NiO}$ -Schichten durch Oxydation eines Nickelstreifens dar und untersuchten neben Leitfähigkeit und Hall-Effekt die differentiale Thermospannung bis ca.  $700^\circ\text{C}$ . Die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  zwischen warmem und kaltem Ende betrug  $40-50^\circ$ , und es soll sich keine Abhängigkeit der Thermospannung von  $\Delta T$  ergeben haben. Die Frage, ob dies auch für bedeutend kleinere Temperaturdifferenzen richtig ist, bleibt offen. Das Resultat der Messungen ist in Fig. 36 wiedergegeben. Zwischen  $370$  und  $640^\circ\text{C}$  ist das  $1/T$ -Gesetz tatsächlich sehr gut erfüllt, und es ergeben sich Werte für die Aktivierungsenergie  $\Delta E_A$  von  $1,67-1,94$  eV, die mit den aus Leitfähigkeitsmessungen bestimmten Werten befriedigend übereinstimmen.

Die auf Grund der Theorie zu erwartende Abhängigkeit der Thermospannung von der Störstellendichte  $n_A$  wurde nicht beobachtet. Offenbar liegt der Grund darin, daß alle untersuchten  $\text{NiO}$ -Proben sehr gleichmäßig durchoxydiert wurden. Die Donatorendichte schwankt wenig um einen Mittelwert von  $n_A = 5,37 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ .

Die Untersuchungen von HOGARTH [72, 73] am  $\text{CdO}$  liefern zwischen  $240$  und  $570^\circ\text{C}$  sehr ähnliche Ergebnisse. Insbesondere wird die theoretisch geforderte Temperaturabhängigkeit bestätigt. Ferner liefern diese Messungen wert-

volle Aussagen über den Einfluß der Störstellendichte auf die differentiale Thermospannung. Nach (42), Abschnitt 3.322, ist die Störstellenkonzentration in einem Oxyd eine Funktion des Sauerstoffdruckes wie

$$n_D = \text{const } p^{1/n}. \quad (63)$$

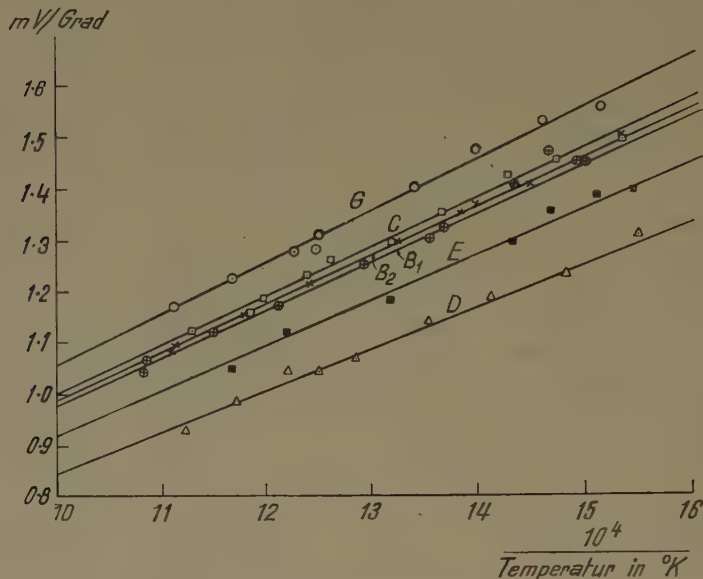


Fig. 36

Differentiale Thermospannung des Elementes Pt-NiO-Pt als Funktion der reziproken Temperatur. (Nach WRIGHT und ANDREWS.)

Durch Einsetzen in (62), Abschnitt 4.1, findet man für konstante Temperatur sofort den Zusammenhang

$$\frac{dV_{MH}}{dT} \sim \log p. \quad (64)$$

Dieser wird nach HOGARTH durch Messungen an CdO, Cu<sub>2</sub>O, NiO und ZnO bestätigt. Für die Exponenten  $n$  ergeben sich Werte, die gut mit denen übereinstimmen, die auf Grund thermodynamischer Überlegungen von v. BAUMBACH und WAGNER [22] und DÜNWALD und WAGNER [47] angegeben wurden.

Einen von der bisher existierenden Theorie völlig abweichenden Temperaturverlauf der differentiellen Thermospannung finden BUSCH, SCHMID und SPÖNDLIN [37] an SiC. Fig. 37 stellt die Resultate für Temperaturen zwischen 80 und 300° K dar. Das Vorzeichen der Thermospannung stimmt mit den Beobachtungen von HOCHBERG und SOMINSKI [71] und den Messungen des Hall-Effektes von BUSCH und LABHART überein.

Die Thermospannungen wurden an einkristallinen SiC-Stäbchen gegen Kupfer gemessen. Eine Abhängigkeit der Thermospannung von der Temperaturdifferenz wurde nicht gefunden. Auffallend ist dagegen die eindeutige Ab-

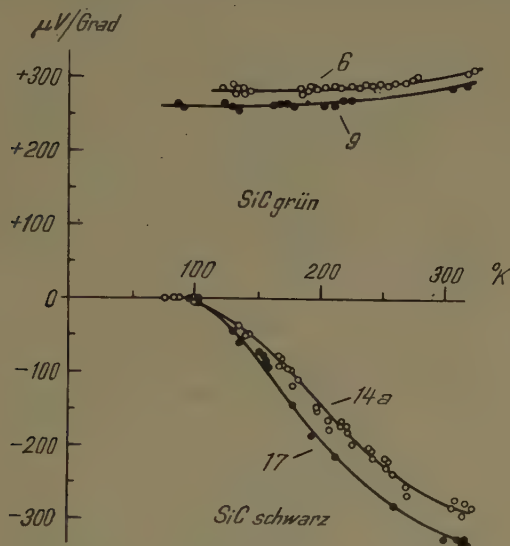


Fig. 37

Differentiale Thermospannung des Elementes Cu-SiC-Cu als Funktion der Temperatur.  
(Nach BUSCH, SCHMID und SPÖNDLIN.)

nahme der differentiellen Thermospannung mit sinkender Temperatur, die für (schwarzes)  $p$ -SiC besonders stark ausgeprägt ist. Bei 100°K verschwindet die Thermospannung völlig und bleibt auch bei tieferen Temperaturen Null. Ein Vorzeichenwechsel scheint damit ausgeschlossen. Eine elektronentheoretische Erklärung dieses Verhaltens steht noch aus.

## 5. Schlußwort

Seit mehr als 40 Jahren haben sich Physiker und Physiko-Chemiker mehr oder weniger intensiv mit dem Problem der nichtmetallischen Elektronenleitung beschäftigt. Eine Fülle experimenteller Tatsachen ist gesammelt worden und hat zum mindesten in den wesentlichen Zügen eine Erklärung im Rahmen der theoretischen Vorstellungen über den Zustand des festen Körpers gefunden. Daß bis jetzt nur in wenigen Fällen ein in Einzelheiten gehendes Verständnis und eine quantitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie erreicht wurde, ist nicht erstaunlich. Einerseits sind unsere Kenntnisse über die



Realstruktur der festen Körper noch recht lückenhaft, andererseits reichen unsere präparativen Methoden nicht aus, um feste Körper zu realisieren, die unseren einfachen Modellen entsprechen. Welchen Schwierigkeiten man in dieser Hinsicht begegnet, zeigt vielleicht am eindrucklichsten das Selen. Trotzdem dieses Element Gegenstand einer großen Zahl experimenteller Arbeiten ist, kann heute noch in keiner Weise von einer Abklärung der wirklichen Verhältnisse gesprochen werden. Auf eine Besprechung dieses Halbleiters wurde daher, trotz seiner technischen Bedeutung, im vorliegenden Bericht bewußt verzichtet.

Trotz der vielen wertvollen Erkenntnisse, die bis heute über Halbleiter gewonnen worden sind, besteht kein Zweifel, daß nur äußerst sorgfältige experimentelle Arbeiten weiterhelfen können. Dem Forscher, der sich für dieses sehr reizvolle Gebiet interessiert, mangelt es jedenfalls nicht an Problemen.

## LITERATURVERZEICHNIS

### A. Zusammenfassende Darstellungen

1. L. BRILLOUIN, *Quantenstatistik* (Springer, Berlin 1932).
2. H. FRÖHLICH, *Elektronentheorie der Metalle* (Springer, Berlin 1936).
3. B. GUDDEN, *Ergebn. exakten Naturw.* 3, 116 (1924); 13, 223 (1934).
4. W. JOST, *Diffusion und chemische Reaktion in festen Stoffen* (Steinkopf, Dresden und Leipzig 1937).
5. E. JUSTI, *Leitfähigkeit und Leitungsmechanismus fester Stoffe* (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1948).
6. N. F. MOTT und R. W. GURNEY, *Electronic Processes in Ionic Crystals* (Oxford 1940).
7. N. F. MOTT und H. JONES, *Metals and Alloys* (Oxford 1936).
8. F. SEITZ, *Modern Theory of Solids* (MacGraw Hill, New York 1941).
9. A. SOMMERFELD und H. BETHE, *Handbuch der Physik* 24/2 (1933).
10. H. C. TORREY und C. A. WITHMER, *Crystal Rectifiers* (MacGraw Hill, New York 1948).
11. H. A. WILSON, *Semiconductors and Metals* (Cambridge 1939).

### B. Originalarbeiten

12. J. S. ANDERSON und M. C. MORTON, *Proc. Roy. Soc.* 184, 82 (1945).
13. J. S. ANDERSON und M. C. MORTON, *Trans. Faraday Soc.* 43, 185 (1947).
14. J. S. ANGELLO, *Phys. Rev.* 62, 371 (1942).
15. J. P. ANDREWS, *Proc. Phys. Soc.* 59, 990 (1947).
16. O. VON AUWERS, *Naturw.* 19, 133 (1931).
17. R. BACH, *Arch. Sci. phys. nat. Genève* 9, 426 (1927).
18. J. BARDEEN, *Phys. Rev.* 75, 1777 (1949).
19. T. F. W. BARTH und E. POSNJAK, *Z. Krist.* 82, 325 (1932).
20. G. BAUER, *Ann. Phys.* 30, 433 (1937).
21. K. BAUER, *Ann. Phys.* 38, 84 (1940).
22. H. H. V. BAUMBACH und C. WAGNER, *Z. phys. Chem.* 22, 199 (1933); 24, 59 (1934).
23. F. BLOCH, *Z. Phys.* 52, 555 (1928).
24. G. BORELIUS und K. GULLBERG, *Ark. Math. Ast. Fis.* 31. A. (1945).
25. J. K. BOSE und S. R. KASTGIR, *Z. Phys.* 100, 80 (1938).
26. V. E. BOTTOM, *Phys. Rev.* 74, 1218 (1948).
27. V. E. BOTTOM, *Phys. Rev.* 75, 1310 (1949).

28. P. W. BRIDGMAN, vgl. die zusammenfassenden Darstellungen von E. JUSTI [5] und E. GRÜNEISEN, *Ergebn. exakten Naturw.* **21**, 50 (1945).
29. P. W. BRIDGMAN, *Proc. Am. Acad. Sci.* **68**, 95 (1933); **72**, 159 (1938).
30. P. W. BRIDGMAN, *Proc. Am. Acad. Sci.* **74**, 21 (1940).
31. M. BRONSTEIN, *Z. Phys. Sow.-Union* **2**, 28 (1932); **3**, 140 (1933).
32. G. BUSCH, *Helv. phys. Acta* **19**, 167 (1946).
33. G. BUSCH, *Helv. phys. Acta* **19**, 189 (1946).
34. G. BUSCH und H. FLURY, unveröffentlicht.
35. G. BUSCH, H. FLURY und W. MERZ, *Helv. phys. Acta* **27**, 212 (1948).
36. G. BUSCH und H. LABHART, *Helv. phys. Acta* **19**, 463 (1946).
37. G. BUSCH, P. SCHMID und H. SPÖNDLIN, *Helv. phys. Acta* **20**, 461 (1947).
38. C. H. CARTWRIGHT, *Ann. Phys.* **78**, 656 (1933).
39. C. H. CARTWRIGHT, *Phys. Rev.* **49**, 443 (1936).
40. C. H. CARTWRIGHT und M. HABERFELDT, *Nature* **134**, 287 (1934).
41. C. H. CARTWRIGHT und M. HABERFELDT, *Proc. Roy. Soc.* **148**, 648 (1935).
42. E. CONWELL und V. F. WEISSKOPF, *Phys. Rev.* **69**, 258 (1946).
43. V. A. DAVIDENKO, *J. Phys. U.S.S.R.* **4**, 170 (1941).
44. J. H. DE BOER und E. J. W. VERWEY, *Proc. Phys. Soc.* **49**, Extra Part, 59 (1937).
45. W. DE KEYSER, R. TEMMERMAN und J. COLENBUNDERS, *Mededelingen Natuurk. Lab. Gent* Nr. 20.
46. E. D. DEVIATKOVA und J. P. MASLAKOV, *J. Phys. U.S.S.R.* **4**, 169 (1941).
47. H. DÜNWALD und C. WAGNER, *Z. phys. Chem. [B]* **22**, 212 (1933).
48. F. ECKHART und K. RAITHEL, *Naturw.* **29**, 572 (1941).
49. E. ENGELHARD, *Ann. Phys.* **77**, 501 (1933).
50. L. EISENMANN, *Ann. Phys.* **38**, 121 (1940).
51. J. A. V. FAIRBROTHER, *Proc. Roy. Soc.* **157**, 50 (1936).
52. W. FELDMANN, *Phys. Rev.* **64**, 113 (1943).
53. F. FISCHER und K. DEHN, *Ges. Abh. Kenntn. Kohle* **12**, 526 (1937).
54. F. FISCHER, K. DEHN und H. SUSTMANN, *Ann. Phys.* **15**, 109 (1932).
55. E. FRIEDRICH, *Z. Phys.* **31**, 813 (1925).
56. O. FRITSCH, *Ann. Phys.* **22**, 375 (1935).
57. H. FRÖHLICH, *Proc. Roy. Soc.* **160**, 230 (1937).
58. H. FRÖHLICH und N. F. MOTT, *Proc. Roy. Soc.* **171**, 496 (1939).
59. J. H. GISOLF, *Ann. Phys.* **1**, 3 (1947).
60. J. GOLDMANN und A. W. LAWSON, *Phys. Rev.* **64**, 11 (1934).
61. B. GUDDEN, *Ber. phys.-med. Soc. Erlangen* **62**, 287 (1930).
62. P. GUILLERY, *Ann. Phys.* **14**, 216 (1932).
63. P. GUILLERY, *Phys. Z.* **32**, 891 (1931).
64. J. GUNDERMANN, H. HAUFFE und C. WAGNER, *Z. phys. Chem.* **37**, 148, 155 (1931).
65. E. E. HAHN, B. R. RUSSEL und P. H. MILLER, *Phys. Rev.* **75**, 1631 (1949).
66. W. HARTMANN, *Z. Phys.* **102**, 709 (1936).
67. H. K. HENISCH, *El. Comm.* p. 163 (1948).
68. F. P. HENNINGER, *Ann. Phys.* **28**, 245 (1937).
69. F. P. HENNINGER, *Phys. Z.* **39**, 911 (1938).
70. H. HINTENBERGER, *Z. Phys.* **119**, 1 (1942).
71. B. M. HOCHBERG und M. J. SOMINSKI, *Phys. Z. Sow.-Union* **13**, 198 (1938).
72. C. A. HOGARTH, *Nature* **161**, 60 (1948).
73. C. A. HOGARTH, *Phil. Mag.* **40**, 273 (1949).
74. R. M. HOLMES und H. W. ALLEN, *Phys. Rev.* **55**, 593 (1939).
75. D. K. HOLMES, *Phys. Rev.* **76**, 179 (1949).
76. F. HUND, *Phys. Z.* **36**, 888 (1935).
77. R. ILEY und H. L. RILEY, *Nature* **160**, 468 (1947).
78. W. JANDER, und W. STAMM, *Z. anorg. Chem.* **199**, 265 (1931).
79. V. A. JOHNSON, *Phys. Rev.* **74**, 1255 (1948).
80. V. A. JOHNSON und K. LARK-HOROVITZ, *Phys. Rev.* **69**, 259 (1946).
81. V. A. JOHNSON und K. LARK-HOROVITZ, *Phys. Rev.* **71**, 374, 909 (1947).
82. V. A. JOHNSON und K. LARK-HOROVITZ, *Phys. Rev.* **72**, 531 (1947).
83. W. JUSÉ und B. KURTSCHATOW, *J. Phys. U.S.S.R.* **2**, 309 (1932).

84. G. E. KIMBALL, J. Chem. Phys. **3**, 560 (1937).
85. J. KÖNIGSBERGER und K. SCHILLING, Ann. Phys. **32**, 129 (1910).
86. J. V. KURTSCHATOW, T. Z. KOSTINA und W. L. RUSINOW, Phys. Z. Sow.-Union **7**, 129 (1935).
87. K. LARK-HOROVITZ, A. E. MIDDLETON, E. P. MILLER und J. WALERSTEIN, Phys. Rev. **69**, 258 (1946).
88. T. W. LASHOF, J. Chem. Phys. **11**, 196 (1943).
89. F. LAUSTER, Z. Phys. **59**, 83 (1929); **67**, 578 (1930).
90. M. LE BLANC und H. SACHSE, Ann. Phys. **11**, 727 (1931).
91. K. LEGRAND, Z. Phys. **124**, 219 (1948).
92. J. McDUGALL und E. C. STONER, Phil. Trans. Roc. Soc. London **771**, 67 (1938).
93. W. MEISSNER und B. VOIGT, Ann. Phys. **7**, 892 (1930).
94. W. MEYER, Z. Phys. **85**, 278 (1933).
95. W. MEYER, Z. El. Chem. **50**, 279 (1944).
96. W. MEYER und H. NELDEL, Z. techn. Phys. **18**, 588 (1937).
97. P. H. MILLER, Phys. Rev. **60**, 890 (1941).
98. F. MÖGLICH, Z. Phys. **109**, 503 (1938).
99. G. MÖNCH, Z. techn. Phys. **16**, 361 (1935); Ann. Phys. **26**, 481 (1936).
100. G. MÖNCH, Ann. Phys. **34**, 265 (1939).
101. M. C. MORTON, Trans. Faraday Soc. **43**, 194 (1947).
102. J. F. MULLANEY, Phys. Rev. **66**, 326 (1944).
103. K. NAGEL und C. WAGNER, Z. phys. Chem. **25**, 71 (1934).
104. H. M. O'BRYAN und H. W. B. SKINNER, Phys. Rev. **45**, 370 (1934).
105. H. OSTERBERG, Phys. Rev. **50**, 1187 (1936).
106. G. L. PEARSON und J. BARDEEN, Phys. Rev. **75**, 865 (1949).
107. G. L. PEARSON und W. SHOCKLEY, Phys. Rev. **71**, 142 (1947).
108. E. H. PUTLEY, Proc. Phys. Soc. **62**, 284 (1949).
109. W. RINGER und H. WELKER, Z. Naturf. **3a**, 20 (1948).
110. W. ROHDE, Ann. Phys. **34**, 259 (1939).
111. W. SCANLON und K. LARK-HOROVITZ, Phys. Rev. **72**, 530 (1947).
112. E. SCHMID und G. WASSERMANN, Z. Phys. **46**, 653 (1928).
113. W. SCHOTTKY und F. WAIBEL, Phys. Z. **34**, 858 (1933).
114. W. SCHOTTKY und F. WAIBEL, Phys. Z. **36**, 912 (1935).
115. A. SCHULZE, Phys. Z. **37**, 1062 (1930); Z. techn. Phys. **67**, 578 (1930).
116. H. SCHWEICKERT, Ann. Phys. **34**, 250 (1939).
117. R. W. SEARS und J. A. BECKER, Phys. Rev. **40**, 1055 (1933).
118. H. J. SEEMANN, Phys. Z. **28**, 765 (1927); **29**, 94 (1928); Z. Phys. **61**, 576 (1930).
119. H. J. SEEMANN, Phys. Z. **30**, 143 (1929).
120. F. SEITZ, Phys. Rev. **73**, 549 (1948).
121. K. SHIFRIN, J. Phys. U.S.S.R. **8**, 242 (1944).
122. F. SKAUPY, Z. Phys. **1**, 259 (1920).
123. P. SOMMERVILLE, Phys. Rev. **34**, 311 (1912).
124. E. J. W. VERWEY, P. W. HAAYMAN und F. C. ROMEIJN, J. Chem. Phys. **15**, 181 (1947).
125. A. VOELKL, Ann. Phys. **14**, 193 (1932).
126. W. VOGT, Ann. Phys. **7**, 183 (1930).
127. C. WAGNER, Trans. Faraday. Soc. **34**, 851 (1938).
128. F. WAIBEL, Wiss. Veröff. Siemens-Konzern **10**, 65 (1931).
129. A. H. WILSON, Proc. Roy. Soc. **133**, 458 (1931); **134**, 277 (1932).
130. R. W. WRIGHT und J. R. ANDREWS, Proc. Phys. Soc. **62**, 446 (1949).
131. V. ZHUZE und J. STARCHENKO, J. exp. theor. Phys. U.S.S.R. **10**, 331 (1940).

(Eingegangen: 22. 9. 49.)

**Berichtigung:** Formel (23) auf S. 20 dieses Berichtes muß lauten:

$$b_{E,L} = \frac{4}{3} \cdot \frac{e l_{E,L}}{(2 \pi m_{E,L}^* \hbar T)^{1/2}}.$$

# Natürliche Eigenwertprobleme

## 1. Mitteilung

Von EDUARD STIEFEL und HANS ZIEGLER, ETH., Zürich

### 1. Problemstellung

Es gibt bekanntlich drei Zugänge zur Theorie der Eigenwertprobleme und ihrer genäherten Lösung, nämlich diejenigen der Differentialgleichung, der Integral- bzw. Integrodifferentialgleichung und der Variationsrechnung. L. COLLATZ wählt in seinem ausgezeichneten Buch<sup>1)</sup> – mit der Begründung, daß er weiter führe als die beiden anderen – den ersten Weg und stützt sich dabei weitgehend auf die Arbeiten von E. KAMKE<sup>2)</sup>. Das Verfahren der Differentialgleichung hat aber den Nachteil, den physikalischen, insbesondere mechanischen Eigenwertaufgaben, die sich bekanntlich ausnahmslos aus einem Variationsprinzip herleiten lassen, weniger gut angepaßt zu sein als die Methode der Variationsrechnung, der sich – freilich nicht in dieser Allgemeinheit, sondern an Hand spezieller Probleme – unter anderen R. GRAMMEL<sup>3)</sup> bedient. Vor allem läßt sich kaum vermeiden – und dieser Gefahr sind weder E. KAMKE noch L. COLLATZ ganz aus dem Wege gegangen –, daß Voraussetzungen eingeführt werden, die dem physikalischen Problem nicht adäquat und daher im Einzelfall nicht leicht zu überprüfen sind.

So stellt sich z. B. schon bei der Formulierung der Differentialgleichung<sup>4)</sup>, die ja spezieller Natur ist und insbesondere nur selbstadjungierte Differentialausdrücke enthält, die Frage, ob sie die beispielsweise in der Mechanik vorkommenden Fälle richtig wiedergebe, und ähnlich steht es mit den Randbedingungen. Eine weitere Schwierigkeit tritt mit der Beschränkung auf sogenannte definite und selbstadjungierte Eigenwertaufgaben auf, die für zahlreiche Zwecke und insbesondere für die Begründung der meisten Näherungsverfahren vorgenommen wird. Abgesehen davon, daß die Begriffe der Definitheit und der Selbstadjungiertheit in der Kamkeschen Definition<sup>5)</sup> ohne einfache physikalische Bedeutung sind, werden sie, da sie die Existenz von sogenannten Vergleichsfunktionen voraussetzen, unbrauchbar, sobald keine solchen angegeben werden können. Dies trifft aber bei allen Problemen zu, bei denen der Eigen-

<sup>1)</sup> L. COLLATZ, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung* (Leipzig 1945).

<sup>2)</sup> E. KAMKE, *Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen*, Math. Z. 45, 759 (1939); 46, 231 und 251 (1940); 48, 67 (1942).

<sup>3)</sup> C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Berlin 1939).

<sup>4)</sup> L. COLLATZ, a. a. O., S. 57.

<sup>5)</sup> L. COLLATZ, a. a. O., S. 59 und 69.



wert in den Randbedingungen vorkommt, und dazu gehören zahlreiche einfache mechanische Aufgaben, von denen nur die Längsschwingung des einseitig eingespannten, am anderen Ende eine freie Masse tragenden Stabes genannt sei.

Man läßt sich in der angewandten Mathematik bestimmt nicht von einem schlechten Prinzip leiten, wenn man nur Voraussetzungen anerkennt, die sich vom Gesichtspunkt der Anwendungen her, im vorliegenden Falle also physikalisch übersehen und vertreten lassen. In diesem Sinne stellt aber die Methode der Variationsrechnung den natürlichen Zugang zu den Eigenwertaufgaben dar, weil sich die für das mathematische Problem charakteristischen Merkmale in einfachster Weise aus den Bindungen des betrachteten Systems und seinen Energien herleiten lassen. Die Verfasser dieser Arbeit haben sich deshalb die Aufgabe gestellt, die Eigenwerttheorie zwar unter Beschränkung auf je eine unabhängige und abhängige Veränderliche, im übrigen aber möglichst allgemein aus dem Variationsprinzip zu entwickeln, wobei als Grundlage Schwingungs- und Stabilitätsprobleme gewählt und nur physikalisch einleuchtende Annahmen zugelassen werden.

Ursprünglich bestand nur die Absicht, die von L. COLLATZ verwendeten Annahmen durch Herstellung des Zusammenhangs zwischen der Variationsaufgabe einerseits und der Differentialgleichung sowie den dynamischen Randbedingungen andererseits zu begründen. Dabei erwies es sich als zweckmäßig, den Begriff des natürlichen Eigenwertproblems einzuführen, denjenigen der Definitheit neu zu fassen und auf den Begriff der Selbstadjungiertheit im Sinne von L. COLLATZ zu verzichten. Damit ergab sich aber die Notwendigkeit, die bekannten Sätze der Eigenwerttheorie auf einem neuen Wege zu bestätigen und für gewisse Fälle zu verallgemeinern, bei denen der Eigenwert in den Randbedingungen auftritt. Gleichzeitig bot sich aber auch die Möglichkeit, das Problem durch eine Integrodifferentialgleichung darzustellen und damit auch den dritten Zugang zur Lösung vom Variationsprinzip aus zu eröffnen.

Den Inhalt dieser ersten Mitteilung bildet die Abgrenzung des Problemkreises durch Zusammenstellung der Voraussetzungen sowie die Herleitung der Differentialgleichung und der dynamischen Randbedingungen aus dem Variationsprinzip. Die Überlegungen, zu denen in Ziffer 2 einige Beispiele Anlaß geben, und die bei Schwingungs- und Stabilitätsaufgaben (Probleme mit kritischen Drehzahlen inbegriffen) weitgehend parallel verlaufen, werden in den Ziffern 3 und 4 verallgemeinert und führen zur Definition der natürlichen bzw. definiten Probleme. Da in zahlreichen neueren Arbeiten – darunter denjenigen von K. FEDERHOFER<sup>1)</sup> – Differentialgleichungen sechster, achter und höherer Ordnung vorkommen, wird dabei die Ordnung des Problems, die in

---

<sup>1)</sup> K. FEDERHOFER, *Biegungsschwingungen eines Kreisrings bei konstantem Außen- und Innendrucke*, Ing. Arch. 4, 110 (1933); *Berechnung der niedrigsten Eigenschwingzahl des radial belasteten Kreisbogens*, Ing. Arch. 4, 376 (1933); *Der senkrecht zu seiner Ebene schwingende Kreisbogenträger mit I-Querschnitt*, Z. angew. Math. Mech. 20, 13 (1940).

Ziffer 5 diskutiert wird, nicht beschränkt. In Ziffer 6 wird das natürliche Eigenwertproblem als Variationsaufgabe formuliert und in Ziffer 7 durch Übergang auf die sogenannten Normalformen formal vereinfacht. Die Differentialgleichung, die in Ziffer 8 gewonnen wird, besitzt bis auf untergeordnete Eigenschaften die von L. COLLATZ postulierte Gestalt, ebenso die Randbedingungen, die aber in Ziffer 9 wesentlich präziser formuliert werden können.

## 2. Ein Beispiel

Als Beispiel, das zwar etwas konstruiert wirkt, aber durch Spezialisierung in der einen oder anderen Richtung in verschiedene praktisch vorkommende Fälle übergeführt werden kann, sei die fliegende Welle (Fig. 1) angeführt,

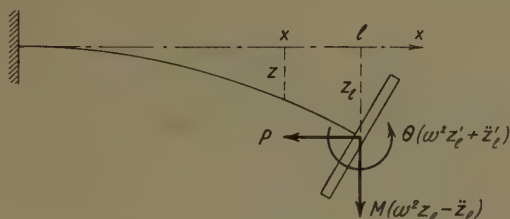


Fig. 1. Rotierende fliegende Welle unter Axialdruck.

welche die Länge  $l$ , die Dichte  $\rho(x)$ , den Elastizitätsmodul  $E(x)$ , den Querschnitt  $F(x)$  mit dem axialen Trägheitsmoment  $I(x)$  und dem polaren  $2 I(x)$  besitzt und am freien Ende eine dünne Kreisscheibe mit der Masse  $M$ , dem äquatorialen Trägheitsmoment  $\Theta$  und dem axialen  $2 \Theta$  sowie eine axiale Last  $P$  trägt.

Diese Welle, die sich zunächst mit der gegebenen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihre Achse drehen möge, kann unter der einschränkende Annahme, daß sie an die  $(x, z)$ -Ebene eines mitrotierenden Koordinatensystems gebunden sei, Schwingungen

$$z(x, t) = y(x) \sin \sigma t$$

ausführen, deren Amplitudenfunktionen der Differentialgleichung

$$(E I y'')'' + [(P - \omega^2 \rho I) y']' - \omega^2 \rho F y = \sigma^2 [-(\rho I y')' + \rho F y] \quad (2.1)$$

und den Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} y' = 0 \\ y'' = 0 \end{array} \right\} (x = 0) \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} E I y'' + (\omega^2 - \sigma^2) \Theta y' = 0 \\ (E I y'')' + [P - (\omega^2 - \sigma^2) \rho I] y' + (\omega^2 + \sigma^2) M y = 0 \end{array} \right\} (x = l) \quad (2.3)$$

genügen. Es liegt also ein Eigenwertproblem vierter Ordnung mit dem Eigenwert  $\lambda = \sigma^2$  vor, der auch in den dynamischen<sup>1)</sup> Randbedingungen (2.3) auftritt.

Die Differentialgleichung (2.1) sowie die dynamischen Randbedingungen (2.3) lassen sich auch aus einem Variationsprinzip herleiten. Die spezifische – d. h. auf die Längeneinheit bezogene – potentielle Energie der Welle ist nämlich

$$\bar{V} = \frac{1}{2} [E I z''^2 + (\omega^2 \varrho I - P) z'^2 - \omega^2 \varrho F z^2], \quad (2.4)$$

wobei das erste Glied die Formänderungsenergie, die mit  $\omega^2$  behafteten Terme das Potential der Zentrifugalkraft (einschließlich des Kreismomentes) und das Glied mit  $P$  dasjenige der axialen Belastung darstellt. Die spezifische Bewegungsenergie der Welle ist durch

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \varrho (I z'^2 + F z^2) \quad (2.5)$$

gegeben, die beiden Energien der Scheibe durch

$$V_t = \frac{1}{2} \omega^2 (\Theta z_t'^2 - M z_t^2), \quad T_t = \frac{1}{2} (\Theta z_t'^2 + M z_t^2), \quad (2.6)$$

und das Hamiltonsche Prinzip, für das ganze, aus Welle und Scheibe bestehende System formuliert, führt auf die Forderung

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^l [-(E I y'')'' - P y'' + (\omega^2 - \sigma^2) (\varrho I y')' + (\omega^2 + \sigma^2) \varrho F y] \delta y \, dx - \\ & - [E I y'' + (\omega^2 - \sigma^2) \Theta y']_l \delta y_l' + \\ & + [(E I y'')' + P y' - (\omega^2 - \sigma^2) \varrho I y' + (\omega^2 + \sigma^2) M y]_l \delta y_l = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

für die Eigenfunktionen  $y$ , die nur dann für beliebige, den kinematischen Randbedingungen (2.2) genügende Variationen  $\delta y$  erfüllt ist, wenn die drei eckigen Klammern einzeln verschwinden, die Funktionen  $y$  also der Differentialgleichung (2.1) und den dynamischen Randbedingungen (2.3) genügen.

Die Auflösung des Eigenwertproblems (2.1) bis (2.3), d. h. die Bestimmung der Eigenwerte  $\sigma^2$ , ist praktisch nur dann interessant, wenn die gesamte potentielle Energie

$$V = \int_0^l \bar{V} \, dx + V_t = \frac{1}{2} \int_0^l [E I y''^2 + (\omega^2 \varrho I - P) y'^2 - \omega^2 \varrho F y^2] \, dx + \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \omega^2 (\Theta y_t'^2 - M y_t^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

<sup>1)</sup> Vgl. die Definition der dynamischen Randbedingungen in Ziffer 5, S. 125.

des Systems positiv definit, d. h. für keine Funktion  $y$ , die den kinematischen Randbedingungen (2. 2) genügt, negativ ist. Trifft nämlich diese Voraussetzung nicht zu – und dies kann leicht dadurch erreicht werden, daß man  $P$  genügend groß wählt –, so ist die Gleichgewichtslage  $y \equiv 0$  labil, und von einem Schwingen kann nicht mehr gesprochen werden.

Setzt man  $\sigma^2 = 0$ , so wird aus dem Schwingungs- ein Stabilitätsproblem. Dieses beantwortet die Frage nach denjenigen Wertepaaren  $P, \omega^2$ , für die neben  $y \equiv 0$  weitere relative Gleichgewichtslagen existieren, und führt, je nachdem man  $\omega^2$  oder  $P$  als konstant betrachtet, auf die Bestimmung der kritischen Lasten oder der kritischen Winkelgeschwindigkeiten des Gleichlaufs<sup>1)</sup>. Man kann aber auch das Verhältnis  $P/\omega^2$  konstant halten, also von einer durch  $P_0, \omega_0^2$  gegebenen *Grundbelastung* ausgehen,

$$P = \lambda P_0 \quad \text{ sowie } \quad \omega^2 = \lambda \omega_0^2 \quad (2. 9)$$

setzen und nach denjenigen Werten von  $\lambda$  fragen, unter denen eine von  $y \equiv 0$  verschiedene Gleichgewichtslage existiert. Die Differentialgleichung lautet dann

$$(E I y'')'' = \lambda [-P_0 y'' + \omega_0^2 (\varrho I y')' + \omega_0^2 \varrho F y] \quad (2. 10)$$

und liefert, durch die kinematischen Randbedingungen (2. 2) sowie die dynamischen

$$\left. \begin{aligned} E I y'' + \lambda \omega_0^2 \Theta y' &= 0 \\ (E I y'')' + \lambda (P_0 - \omega_0^2 \varrho I) y' + \lambda \omega_0^2 M y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (x = l) \quad (2. 11)$$

ergänzt, wieder ein Eigenwertproblem vierter Ordnung, wobei der neue Eigenwert  $\lambda$  auch in den dynamischen Randbedingungen (2. 11) auftritt.

Auch die Stabilitätsaufgabe läßt sich – bis auf die kinematischen Randbedingungen (2. 2) – aus einem Variationsprinzip herleiten. Das d'Alembertsche Prinzip, vom Standpunkt des mitrotierenden Beobachters formuliert, verlangt nämlich, daß die gesamte potentielle Energie in jeder Gleichgewichtslage stationär sei, und führt damit auf die Forderung

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^l [(E I y'')'' + \lambda P_0 y'' - \lambda \omega_0^2 (\varrho I y')' - \lambda \omega_0^2 \varrho F y] \delta y \, dx + \\ &+ [E I y'' + \lambda \omega_0^2 \Theta y']_l \delta y_l - \\ &- [(E I y'')' + \lambda P_0 y' - \lambda \omega_0^2 \varrho I y' + \lambda \omega_0^2 M y]_l \delta y_l = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2. 12)$$

aus der durch Nullsetzen der eckigen Klammern wieder die Differentialgleichung (2. 10) und die dynamischen Randbedingungen (2. 11) erhalten werden.

<sup>1)</sup> Vgl. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, a. a. O., S. 784.



Auch die Lösung des Eigenwertproblems (2. 10), (2. 2), (2. 11) ist praktisch nur bedingt von Interesse, nämlich nur dann, wenn die potentielle Energie der Grundbelastung, die mit

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_0^l [(\omega_0^2 \varrho I - P_0) y'^2 - \omega_0^2 \varrho F y^2] dx + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\Theta y_l'^2 - M y_l^2) \quad (2. 13)$$

der Formänderungsenergie

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l E I y''^2 dx \quad (2. 14)$$

gegenübergestellt werden kann, nicht positiv definit ist. Wäre nämlich, wie dies etwa für große Werte von  $I$  und  $\Theta$  oder für  $P_0 \ll 0$ , d. h. bei starker Kreiselwirkung oder unter kräftigem axialem Zug zutreffen kann<sup>1)</sup>,  $W_0$  positiv definit, so wäre dies auch die gesamte potentielle Energie  $V = U + \lambda W_0$  für jedes nicht negative  $\lambda$ , und die Gleichgewichtslage  $y \equiv 0$  wäre stets stabil. In vielen einfacheren Fällen, z. B. beim gewöhnlichen Knickproblem, bei dem man mit  $\omega_0 = 0$

$$W_0 = -\frac{1}{2} P_0 \int_0^l y'^2 dx \quad (2. 15)$$

erhält, oder beim Problem der kritischen Drehzahlen ohne Axialdruck und Kreiselwirkung, wo aus  $P_0 = 0$ ,  $I = 0$  und  $\Theta = 0$

$$W_0 = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \left( \int_0^l \varrho F y^2 dx + M y_l^2 \right) \quad (2. 16)$$

folgt, ist indessen  $W_0$  nicht nur nicht positiv definit, sondern sogar negativ definit, und damit die Eigenwertaufgabe sinnvoll.

### 3. Die Schwingungsaufgabe

Läßt sich – wie dies z. B. bei ebenen Querschwingungen von Saiten, bei Längs-, Dreh- und ebenen Querschwingungen von Stäben, bei rotationssymmetrischen Dreh- und Dehnungsschwingungen rotationssymmetrischer Scheiben der Fall ist – die Bewegung eines schwingungsfähigen Kontinuums durch eine Gleichung der Form

$$z = z(x, t), \quad (a \leq x \leq b) \quad (3. 1)$$

<sup>1)</sup> Vgl. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, a. a. O., S. 798 und 821.

beschreiben, so kann man von einem *eindimensionalen Schwinger* sprechen. Die Lage eines solchen läßt sich durch eine einzige Funktion  $z(x)$  einer einzigen Veränderlichen, die Gleichgewichtslage durch  $z \equiv 0$  beschreiben; Voraussetzung (3. 1) schließt demnach die meisten Membran-, Scheiben-, Platten und Schalenschwingungen, aber auch die nicht ebenen Querschwingungen von Saiten und Stäben aus.

Die beiden Ränder  $a, b$  des Schwingers können frei oder in ihrer Bewegung behindert sein. Im allgemeinsten Falle bestehen Bindungen in Gestalt eines äußeren Systems mit endlichem Freiheitsgrad, dessen Lage von  $z_a, z_b$  und den örtlichen Ableitungen dieser Größen bis zu einer bestimmten Ordnung  $r$ , d. h. von

$$z_a, z'_a, \dots, z_a^{(r)}; z_b, z'_b, \dots, z_b^{(r)} \quad (3.2)$$

abhängt. Dieses System, das als *Träger* des Kontinuums bezeichnet werden soll, besteht im Beispiel von Ziffer 2 aus dem Einspannkörper und der Scheibe und ist hier insofern spezieller Natur, als zwischen den beiden keine Koppelung besteht.

Die am Schwinger angreifenden Kräfte lassen sich in der üblichen Weise in die inneren Kräfte, die Lasten und die Lagerkräfte unterteilen. Zur ersten Gruppe gehören in Ziffer 2 die Spannungen im Inneren der Welle, zur zweiten die Axiallast, die längs der Welle wirkenden Zentrifugalkräfte samt den zugehörigen Kreismomenten; zur dritten sind die Einspannreaktionen und die von der Scheibe an der Welle ausgeübten Kräfte zu rechnen.

Die beiden ersten Gruppen mögen konservativ und ihre Potentiale so normiert sein, daß sie in der Gleichgewichtslage  $z \equiv 0$  verschwinden. Damit scheiden alle Probleme mit innerer und ein Teil derjenigen mit äußerer Dämpfung – z. B. Querschwingungen von nicht vollkommen elastischen oder durch Luftwiderstand gedämpften Saiten – aus. Ferner sollen sich die spezifischen – d. h. auf die  $x$ -Einheit bezogenen – Potentiale  $\bar{U}$  und  $\bar{W}$  der inneren Kräfte bzw. Lasten mit

$$\bar{U} + \bar{W} = \bar{V}(x, z, z', \dots, z^{(m)}) \quad (3.3)$$

zum spezifischen Potential des Kontinuums zusammenfassen lassen. Diese Annahme eliminiert die nur scheinbar eindimensionalen Aufgaben, wie z. B. die Biegeschwingung des Stabes unter Berücksichtigung der Querkraft<sup>1)</sup>, bei der durch  $z$  und seine örtlichen Ableitungen allein die Schiebung an der Stelle  $x$  und mit ihr die von der Querkraft herrührende Formänderungsenergie nicht eindeutig bestimmt ist.

<sup>1)</sup> S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering* (New York 1928), S. 228.

Von der spezifischen Deformationsenergie darf angenommen werden, daß sie positiv definit sei, und zwar so, daß

$$\bar{U} > 0 \quad (3.4)$$

ist, solange von denjenigen unter den Größen  $z, z', \dots, z^{(m)}$ , von denen  $\bar{U}$  wirklich abhängt, nicht alle verschwinden.

Läßt sich  $\bar{V}$  nach Potenzen von  $z, z', \dots, z^{(m)}$  entwickeln, wobei die Koeffizienten im allgemeinen Funktionen von  $x$  sind, so tritt mit Rücksicht auf die Normierung das von  $z$  und seinen örtlichen Ableitungen unabhängige Glied nicht auf. Aber auch die linearen Terme verschwinden, da für  $z \equiv 0$  jedes Element im Gleichgewicht ist. Man kann daher, falls mindestens ein Glied zweiten Grades von Null verschieden ist,  $\bar{V}$  näherungsweise als quadratische Form

$$\bar{V}[z] = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^m c_{ik}(x) z^{(i)} z^{(k)}, \quad (c_{ki} = c_{ik}) \quad (I)$$

der  $z^{(i)}$  und die gesamte potentielle Energie des Schwingers mit

$$V_s[z] = \int_a^b \bar{V}[z] dx \quad (II)$$

anschreiben, und zwar muß  $\bar{V}$  – da sonst  $m$  kleiner angesetzt werden könnte – von den partiellen Ableitungen von  $z$  nach  $x$  mindestens die  $m$ -te enthalten. Die  $c_{ik}$  sind dabei reelle Funktionen von  $x$ , von denen angenommen werden soll, daß sie im Grundintervall  $a \dots b$  mindestens so oft stetig differenzierbar seien, daß sich die partiellen Integrationen in Ziffer 7 und 8 ohne Schwierigkeiten ausführen lassen. Gemäß (2.4) ist  $\bar{V}$  in Ziffer 2 tatsächlich von der Form (I), wobei freilich nur rein quadratische Terme auftreten und ihre Koeffizienten unter Umständen Sprünge aufweisen können. Im allgemeinen<sup>1)</sup> ist auch mit dem Auftreten von Doppelprodukten zu rechnen; andererseits kann durch praktisch geringfügige Änderungen erreicht werden, daß die Beiwerte die nötigen Differenzierbarkeitseigenschaften haben.

Von der Bewegungsenergie des Schwingers sei angenommen, daß sie sich je  $x$ -Einheit mit

$$\bar{T} = \bar{T}(x, z, z', \dots, z^{(l)}, \dot{z}, \dot{z}', \dots, \dot{z}^{(n)}) \quad (3.5)$$

darstellen lasse, wobei die Punkte Ableitungen nach  $t$  kennzeichnen. Ferner soll sich  $\bar{T}$  nach Potenzen von  $\dot{z}, \dot{z}', \dots, \dot{z}^{(n)}$  entwickeln lassen, wobei die Koeffizienten von  $x, z, z', \dots, z^{(l)}$  abhängen und aus physikalischen Gründen das von  $\dot{z}$  und seinen örtlichen Ableitungen unabhängige Glied sowie die linearen Terme

<sup>1)</sup> Zum Beispiel bei den von K. FEDERHOFER behandelten, a. a. O. erwähnten Problemen.

verschwinden. Man kann dann  $\bar{T}$  unter der Annahme, daß mindestens ein Glied zweiten Grades von Null verschieden sei, wie schon in (2. 5) als quadratische Form

$$\bar{T}[\dot{z}] = \frac{1}{2} \sum_{i, k=0}^n m_{ik}(x) \dot{z}^{(i)} \dot{z}^{(k)}, \quad (m_{ki} = m_{ik}) \quad (\text{III})$$

der  $\dot{z}^{(i)}$  und die gesamte Bewegungsenergie des Schwingers mit

$$T_s[\dot{z}] = \int_a^b \bar{T}[\dot{z}] dx \quad (\text{IV})$$

darstellen, wobei mit dem gleichen Recht wie die Terme höheren Grades die Abhängigkeit der  $m_{ik}$  von  $z, z', \dots, z^{(l)}$  vernachlässigt wird und von allen partiellen Ableitungen von  $\dot{z}$  nach  $x$  mindestens die  $n$ -te vorkommen muß. Die  $m_{ik}$  sind dabei reelle Funktionen von  $x$ , die im Grundintervall wieder genügend oft stetig differenzierbar sein mögen.

Der Träger kann – von seiner Verbindung mit dem Schwinger abgesehen – frei oder gebunden sein bzw. – wie im Fall von Ziffer 2 – aus zwei getrennten Teilen bestehen, von denen noch jeder frei oder gebunden sein kann. Dementsprechend lassen sich die an ihm angreifenden Kräfte in vier Gruppen unterteilen, nämlich in die vom Schwinger herrührenden, an den Rändern  $a, b$  ausgeübten, und die übrigen Lagerkräfte, die inneren Kräfte und die Lasten. Zur ersten Gruppe gehören in Ziffer 2 die von der Welle herrührenden Reaktionen, zur zweiten die Lagerkräfte des Einspannkörpers, zur dritten die Bedingungskräfte der Starrheit im Inneren der Scheibe und des Einspannkörpers und zur vierten die Zentrifugalkraft sowie das Kreismoment der Scheibe.

Die erste Gruppe leistet – zusammen mit ihren Reaktionen am Schwinger – bei kinematisch möglichen Bewegungen keine Arbeit; von der zweiten werde vorausgesetzt, daß sie keine Arbeit leiste, und die beiden letzten Gruppen mögen konservativ und ihre Potentiale so normiert sein, daß sie in der Gleichgewichtslage verschwinden. Damit scheiden nun auch Schwinger mit Dämpfung am Rand – z. B. an den Enden mit Dämpfern versehene Stäbe – aus. Ferner lassen sich jetzt auch die Potentiale  $U_i$  und  $W_i$  der inneren Kräfte bzw. Lasten mit

$$U_i + W_i = V_i(z'_a, z'_a, \dots, z_a^{(r)}; z_b, z_b, \dots, z_b^{(r)}) \quad (3. 6)$$

zur potentiellen Energie des Trägers zusammenfassen, die für  $z \equiv 0$  verschwindet und von den verallgemeinerten Koordinaten (3. 2) des Trägers abhängt.

Läßt sich  $V_i$  nach seinen Argumenten entwickeln, so fallen wie beim Schwinger alle Terme nullten und ersten Grades weg; man erhält also unter der Annahme, daß mindestens ein Glied zweiten Grades von Null verschieden sei,



die quadratische Form

$$V_t[z] = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^r (A_{ik} z_a^{(i)} z_a^{(k)} + 2 B_{ik} z_a^{(i)} z_b^{(k)} + C_{ik} z_b^{(i)} z_b^{(k)}), \quad (V)$$

$$(A_{ki} = A_{ik}, C_{ki} = C_{ik}),$$

in der die  $A_{ik}$ ,  $B_{ik}$ ,  $C_{ik}$  reelle Konstante sind.

Setzt man weiter voraus, daß sich die Bewegungsenergie des Trägers mit den reellen Konstanten  $D_{ik}$ ,  $E_{ik}$ ,  $F_{ik}$  als quadratische Form

$$T_t[\dot{z}] = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^r (D_{ik} \dot{z}_a^{(i)} \dot{z}_a^{(k)} + 2 E_{ik} \dot{z}_a^{(i)} \dot{z}_b^{(k)} + F_{ik} \dot{z}_b^{(i)} \dot{z}_b^{(k)}), \quad (VI)$$

$$(D_{ki} = D_{ik}, F_{ki} = F_{ik})$$

der verallgemeinerten Geschwindigkeiten anschreiben lasse, so hat man mit (V) und (VI) die Verallgemeinerungen von (2. 6) aufgestellt.

Hat der Träger weniger als  $2(r+1)$  Freiheitsgrade, so bestehen zwischen den verallgemeinerten Koordinaten (3. 2) Bindungen, die sich, sofern sie holonom sind, durch voneinander unabhängige Gleichungen der Form

$$R_\mu(z_a, z'_a, \dots, z_a^{(r)}; z_b, z'_b, \dots, z_b^{(r)}) = 0, \quad [\mu = 1, 2, \dots, s \leq 2(r+1)] \quad (3. 7)$$

ausdrücken lassen. Entwickelt man hier die linken Seiten, so fallen mit Rücksicht darauf, daß die Bindungen mit dem Bestehen der Gleichgewichtslage  $z \equiv 0$  verträglich sein müssen, die konstanten Glieder weg. Man erhält also unter der Annahme, daß je mindestens ein linearer Term von Null verschieden sei,  $s$  linear unabhängige Randbedingungen der Gestalt

$$R_\mu[z] = \sum_{v=0}^r (\alpha_{\mu v} z_a^{(v)} + \beta_{\mu v} z_b^{(v)}) = 0, \quad [\mu = 1, 2, \dots, s \leq 2(r+1)], \quad (VII)$$

in denen die  $\alpha_{\mu v}$ ,  $\beta_{\mu v}$  reelle Konstante sind. Diese Bedingungen, die den Freiheitsgrad einschränken und damit als *kinematische* oder in Anlehnung an C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL<sup>1)</sup> als *geometrische Randbedingungen* bezeichnet werden können, sind von der Bewegung und Belastung unabhängig und damit vom Eigenwert frei, gleichgültig, ob es sich um das Schwingungs- oder Stabilitätsproblem handelt. So kommt z. B.  $\sigma^2$  bzw.  $\lambda$  in den dynamischen Randbedingungen (2. 3), (2. 11) vor, nicht aber in den kinematischen (2. 2).

Bezeichnet man als *zulässige Funktionen* diejenigen reellen  $y(x)$ , welche den kinematischen Randbedingungen (VII) genügen, im Intervall  $a \leq x \leq b$   $(m-1)$ -mal stetig differenzierbar sind und hier eine stückweise stetige  $m$ -te Ableitung besitzen, so stellen diese lauter kinematisch mögliche Lagen des

<sup>1)</sup> C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, a. a. O., S. 136.

Schwingers dar. Da sich umgekehrt jede solche durch eine reelle Funktion darstellen lassen muß, die den Randbedingungen (VII) genügt und – wie sich in Ziffer 5 zeigen wird – die erwähnten Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt, beschreiben die zulässigen Funktionen alle passenden Verschiebungen des aus Schwinger und Träger bestehenden Systems.

Ist  $y(x)$  eine zulässige Funktion, so verkörpert

$$z(x, t) = y(x) \sin \sigma t, \quad (\sigma \neq 0) \quad (3.8)$$

eine kinematisch mögliche Bewegung. Ihre kinetische Energie setzt sich gemäß

$$T[\dot{z}] = T_s[\dot{z}] + T_t[\dot{z}] \quad (VIII)$$

aus den Bewegungsenergien des Schwingers und des Trägers zusammen und läßt sich nach (III), (IV), (VI) und (3.8) auf die Form

$$T[\dot{z}] = (T_s[y] + T_t[y]) \sigma^2 \cos^2 \sigma t \quad (3.9)$$

bringen. Schließt man den trivialen Fall aus, daß das aus Schwinger und Träger bestehende System, soweit es an der Bewegung teilnehmen kann, masselos ist, so muß für nicht identisch verschwindende  $y(x)$  die Bewegungsenergie mindestens zeitweise positiv sein, und daraus folgt

$$T[y] > 0, \quad (y \not\equiv 0). \quad (IX)$$

Ferner kann beim Schwingungsproblem vorausgesetzt werden, daß die Gleichgewichtslage  $y \equiv 0$  nicht labil, mithin die gesamte potentielle Energie

$$V[z] = V_s[z] + V_t[z] \quad (X)$$

positiv definit, d. h.

$$V[y] \geq 0, \quad (y \equiv 0) \quad (XI)$$

sei. Dabei muß das Gleichheitszeichen zugelassen werden, um den freien Schwinger – wie er etwa im Falle des ungelagerten Stabes vorliegt – nicht auszuschließen.

Die Voraussetzungen (I) bis (XI), die für die Schwingungsaufgabe im wesentlichen genügen, sind vorwiegend physikalischer Natur und daher bei konkreten Problemen leicht überprüfbar. Sie gehen nicht über die Forderungen hinaus, die man üblicherweise an einen eindimensionalen, konservativen Schwinger stellt.

#### 4. Die Stabilitätsaufgabe

Ähnlich wie beim Schwingungsproblem, wenn auch eine Spur verwickelter, liegen die Verhältnisse bei der Stabilitätsaufgabe. Hier tritt – wie sich in Ziffer 6 zeigen wird – an die Stelle der potentiellen Energie  $V$  die Formände-

rungsenergie  $U$ , und die kinetische Energie  $T$  ist durch das negative Potential  $-W_0$  der sogenannten Grundbelastung zu ersetzen. Die in Ziffer 3 über  $T$  gemachten Voraussetzungen werden daher gegenstandslos; dafür sind diejenigen für  $V$  in solche für  $U$  und  $-W_0$  aufzulösen.

Zerlegt man die potentiellen Energien  $V_s$  und  $V_t$  gemäß (3. 3) und (3. 6) in die Anteile  $U_s$ ,  $U_t$  und  $W_s$ ,  $W_t$ , die von den inneren Kräften bzw. den Lasten herrühren, so hat, da die Lasten willkürlich geändert und insbesondere völlig entfernt werden können,  $\bar{U}[y]$  den gleichen Aufbau wie  $\bar{V}[z]$  in (I),  $U_s[y]$  denjenigen von  $V_s[z]$  in (II) und  $U_t[y]$  die durch (V) für  $V_t[z]$  gegebene Gestalt, wobei die Koeffizienten freilich im allgemeinen nicht dieselben sind. Ferner drückt die auf  $U[y]$  umgeschriebene Beziehung (X) aus, daß sich die Formänderungsenergie aus den vom Kontinuum und vom Träger herrührenden Anteilen additiv zusammensetzt.

Führt man – wie schon in Ziffer 2 – eine *Grundbelastung* mit dem Potential  $W_0$  ein, die sämtliche, am Kontinuum und Träger angreifenden Lasten in einem gegebenen Verhältnis umfaßt, und beschränkt man sich auf die Untersuchung von Belastungen, die sich als Vielfache dieser Grundbelastung darstellen, so kann deren potentielle Energie mit

$$W[y] = \lambda (W_{s0}[y] + W_{t0}[y]) \quad (4. 1)$$

auf die beiden Anteile des Kontinuums und des Trägers zurückgeführt werden. Dabei läßt sich  $W_{s0}[y]$  wie  $T_s[z]$  in (IV),  $-\bar{W}_0[y]$  wie  $\bar{T}[z]$  in (III) und  $-W_{t0}[y]$  wie  $T_t[z]$  in (VI) definieren, und ferner sagt (VIII) aus, daß sich die potentielle Energie der Grundbelastung additiv aus den vom Kontinuum und vom Träger herrührenden Anteilen zusammensetzt.

Die Randbedingungen (VII) gelten auch hier, wenn  $z$  durch  $y$  ersetzt wird; das Stabilitätsproblem, das der ursprünglich vorgelegten Schwingungsaufgabe entspricht, genügt somit, von (IX) und (XI) abgesehen, sämtlichen mit römischen Ziffern bezeichneten Voraussetzungen, sofern die darin auftretenden Größen durch Übergang von  $V$  auf  $U$  und von  $T$  auf  $W$  neu interpretiert werden. Es sollen daher im folgenden Aufgaben, die den Bedingungen (I) bis (VIII) und (X) nebst den in Ziffer 5 zu besprechenden Präzisierungen (XII) bis (XIV) genügen, als *natürliche Schwingungs- oder Stabilitätsprobleme* bezeichnet werden.

Beschränkt man sich auf Stabilitätsaufgaben, bei denen – wie in Ziffer 2 – das unbelastete System nicht schon in der Lage  $y \equiv 0$  im labilen Gleichgewicht ist, so ist die gesamte Formänderungsenergie positiv definit, mithin (XI) auch für  $U[y]$  erfüllt. Diese Annahme bedeutet insofern eine erste Einschränkung des Problemkreises, als Fälle denkbar sind, in denen die Gleichgewichtslage  $y \equiv 0$  für das unbelastete System labil ist und erst durch die Belastung stabilisiert wird. Hieher gehört z. B. der durch eine Feder überkritisch auf Druck und durch eine Axiallast auf Zug beanspruchte Stab.

Eine weitere Einschränkung wird nötig, wenn das Stabilitätsproblem auch der Ungleichung (IX) genügen, d. h. die potentielle Energie der Grundbelastung für keine zulässige Funktion positiv sein soll. Im Beispiel von Ziffer 2 zeigt nämlich (2. 13), daß  $W_0$  in verwickelteren Fällen überhaupt nicht definit ist. Beschränkt man sich aber auf einfachere Probleme, wie z. B. die durch (2. 15) charakterisierte Knickaufgabe oder das Problem (2. 16) der kritischen Drehzahlen ohne Axialdruck und Kreiselwirkung, so ist  $W_0$  für nicht identisch verschwindende zulässige Funktionen negativ und damit (IX) beim Ersatz von  $T$  durch  $-W_0$  erfüllt.

Natürliche Aufgaben, bei denen auch (IX) und (XI) erfüllt sind, sollen im folgenden als *semidefinit* oder *definit* bezeichnet werden, je nachdem in (XI) das Gleichheitszeichen zugelassen wird oder nicht. Zu den semidefiniten Aufgaben gehören dann neben einfacheren Stabilitätsproblemen nach Ziffer 3 auch sämtliche natürlichen Schwingungsaufgaben.

## 5. Die Ordnungszahlen

Gemäß (I) ist bei natürlichen Problemen die potentielle Energie  $\bar{V}[z] dx$  des zwischen den Schnitten  $x$  und  $x + dx$  liegenden Schwingeres durch  $z, z', \dots, z^{(m)}$  gegeben. Die Lage des ganzen Schwingers wird durch eine zulässige Funktion  $z(x)$  beschrieben; im Gegensatz dazu ist aber die Lage des Elementes  $dx$  im allgemeinen nicht durch den Funktionswert  $z$  allein, sondern nur in Verbindung mit den  $m - 1$  ersten Ableitungen bestimmt, so daß man die Größen  $z, z', \dots, z^{(m-1)}$  als Lagekoordinaten des aus dem Verband gelösten Elementes auffassen kann. So folgt z. B. in Ziffer 2 aus (2. 4)  $m = 2$ , und in der Tat treten in der Bewegungsenergie (2. 5) die zeitlichen Ableitungen von  $z$  und  $z'$  auf.

Um allgemein zu zeigen, daß  $z, z', \dots, z^{(m-1)}$  die Lagekoordinaten des Elementes sind, kann man sich zunächst eine passende Verschiebung derart vorgenommen denken, daß der Schwinger aus der Gleichgewichtslage  $z \equiv 0$  in die variierte Lage  $z$  übergeht, wobei in einem bestimmten Schnitt  $x$

$$z = z' = \dots = z^{(m)} = 0, \quad z^{(m+1)} \neq 0$$

ist. Unter der Annahme, daß  $z^{(m)}$  eine Lagekoordinate sei, wäre dann nur noch der Schnitt  $x$ , dagegen  $x + dx$  nicht mehr in der Gleichgewichtslage. Die Verschiebung würde also eine Deformation des Elementes  $dx$  darstellen, und dies widerspricht der Tatsache, daß die potentielle Energie

$$\bar{V} dx = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^m c_{ik} z^{(i)} z^{(k)} dx, \quad (5.1)$$

die in diesem Falle mit der Formänderungsenergie von  $dx$  übereinstimmen



muß, verschwindet. Es folgt hieraus, daß  $z^{(m)}$  als Lagekoordinate ausscheidet und die Terme

$$c_{im}(x) z^{(i)} z^{(m)}, \quad (i = 0, 1, \dots, m) \quad (5.2)$$

in (I) lauter Deformationsenergien darstellen.

Nimmt man jetzt an, daß auch  $z^{(m-1)}$  keine Lagekoordinate sei, so stellt eine Variation der Gleichgewichtslage, bei der in einem beliebigen Schnitt  $x$

$$z = z' = \dots = z^{(m-1)} = 0, \quad z^{(m)} \neq 0$$

ist, weder eine Verschiebung noch eine Deformation des Elementes  $dx$  dar, und daraus folgt nach (5.1), daß  $c_{mm}(x) \equiv 0$  sein muß. Dann kann aber unter der Voraussetzung, daß ein  $x$  existiere, für das wenigstens ein  $c_{im}$ , ( $i \neq m$ ) von Null verschieden sei, eine Variation angegeben werden, für die an der Stelle  $x$

$$z = z' = \dots = z^{(i-1)} = z^{(i+1)} = \dots = z^{(m-1)} = 0, \quad z^{(i)} \neq 0, \quad z^{(m)} \neq 0$$

und im Ausdruck

$$\bar{V} dx = \frac{1}{2} c_{ii} z^{(i)2} + c_{im} z^{(i)} z^{(m)}$$

für die potentielle Energie die rechte Seite und gleichzeitig ihr zweites Glied negativ ist. Da aber nach (5.2) einer dieser beiden Ausdrücke die Deformationsenergie  $\bar{U} dx$  darstellen muß, ist dann im Widerspruch zu (3.4)  $\bar{U} < 0$ . Es müssen also mit  $c_{mm}$  auch alle  $c_{im}$ , ( $i \neq m$ ) identisch verschwinden. Da dies aber der Voraussetzung (I) widerspricht, ist  $z^{(m-1)}$  Lagekoordinate, und mit  $z^{(m-1)}$  sind es, wie ohne weiteres aus der Definition der Ableitung hervorgeht, auch  $z^{(m-2)}, \dots, z', z$ .

Hieraus folgt insbesondere, daß die Terme (5.2) in (I) die ganze Deformationsenergie verkörpern, so daß nach (3.4)

$$c_{mm}(x) > 0 \quad (\text{XII})$$

sein muß, gleichgültig ob es sich um die Schwingungs- oder die Stabilitätsaufgabe handelt. Ferner muß sich beim Schwingungsproblem die Bewegungsenergie (III) in den zeitlichen Ableitungen  $\dot{z}, \dot{z}', \dots, \dot{z}^{(m-1)}$  der Lagekoordinaten, bei der Stabilitätsaufgabe die potentielle Energie der Grundbelastung in diesen selbst ausdrücken lassen, wobei unter Umständen eine Anzahl von Termen ausfallen kann. In beiden Fällen gilt

$$n < m. \quad (\text{XIII})$$

Schließlich reduzieren sich jetzt die verallgemeinerten Koordinaten (3. 2) des Trägers auf

$$z_a, z'_a, \dots, z^{(m-1)}_a; z_b, z'_b, \dots, z^{(m-1)}_b; \quad (5.3)$$

man hat also in den Beziehungen (V) bis (VII)

$$r = m - 1 \quad (XIV)$$

zu setzen. Da dann die kinematischen Randbedingungen (VII) nur Ableitungen bis zur Ordnung  $m - 1$  enthalten, sind sie im Sinne von E. KAMKE<sup>1)</sup> die *wesentlichen Randbedingungen* und umgekehrt die *dynamischen* – die sich im folgenden von selbst aus dem Variationsproblem ergeben werden und Ableitungen  $m$ -ter bzw. höherer Ordnung enthalten – die *restlichen Randbedingungen*. Es gilt also unabhängig von der Ordnung<sup>2)</sup> des Problems

*Satz 1:* Bei natürlichen Eigenwertproblemen sind die kinematischen Randbedingungen mit den wesentlichen, die dynamischen mit den restlichen identisch.

Hieraus und aus der schon anlässlich der Besprechung von (VII) gemachten Bemerkung, daß die  $\alpha_{\mu\nu}, \beta_{\mu\nu}$  den Eigenwert nicht enthalten, ergibt sich ferner

*Satz 2:* Die kinematischen oder wesentlichen Randbedingungen sind bei natürlichen Problemen vom Eigenwert frei.

Hieraus folgt in Verbindung mit der Definition der zulässigen Funktionen

*Satz 3:* Bei natürlichen Problemen gibt es stets zulässige Funktionen.

Die beiden letzten Sätze, die physikalisch ohne weiteres einleuchten, sind für die Behandlung von Eigenwertaufgaben von Bedeutung, bei denen der Eigenwert in den (dynamischen) Randbedingungen vorkommt<sup>3)</sup>.

Damit, daß  $z, z', \dots, z^{(m-1)}$  die Lagekoordinaten des Elementes  $dx$  sind,  $\bar{V}$  aber auch  $z^{(m)}$  enthält, rechtfertigen sich schließlich auch die in Ziffer 3 an die zulässigen Funktionen gestellten Differenzierbarkeitsforderungen. Wären die zulässigen Funktionen nämlich im Intervall  $a \leq x \leq b$  nicht  $(m - 1)$ -mal stetig differenzierbar, so würden sie keine stetige Verschiebung des Kontinuums darstellen, und wenn die  $m$ -te Ableitung nicht wenigstens stückweise stetig wäre, hätte die spezifische potentielle Energie  $\bar{V}$  keinen Sinn.

## 6. Das Variationsproblem

### Die Eigenschwingungen

$$z(x, t) = y(x) \sin \sigma t$$

<sup>1)</sup> Vgl. L. COLLATZ, a. a. O., S. 58.

<sup>2)</sup> Bei E. KAMKE, a. a. O., S. 70, und bei L. COLLATZ, a. a. O., S. 58, wird diese Übereinstimmung nur für  $m = 1$  und  $m = 2$  bestätigt.

<sup>3)</sup> Und demnach Vergleichsfunktionen gemäß L. COLLATZ, a. a. O., S. 59, überhaupt nicht mehr definiert sind.

können im allgemeinsten Falle wie schon im Beispiel von Ziffer 2 dadurch erhalten werden, daß man mit

$$V[z] = V[y] \sin^2 \sigma t \quad \text{ sowie } \quad T[\dot{z}] = T[\dot{y}] \sigma^2 \cos^2 \sigma t \quad (6.1)$$

die potentielle bzw. kinetische Energie des aus Schwinger und Träger bestehenden Systems einführt und das Hamiltonsche Prinzip für dieses Gesamtsystem formuliert. Ihm zufolge zeichnen sich die wirklichen Bewegungen vor allen anderen, die kinematisch möglich sind und im Zeitintervall  $t_2 - t_1$  von einer gegebenen Anfangs- in eine gegebene Endlage führen, durch das Verschwinden der Variation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T[\dot{z}] - V[z]) dt$$

aus. Legt man  $t_1$  und  $t_2$  etwa durch zwei aufeinanderfolgende Durchgänge durch die Gleichgewichtslage fest und verwendet man neben (6.1) die Abkürzung  $\sigma^2 = \lambda$ , so folgt hieraus, wenn man die Integration über die Zeit sofort ausführt,

$$\delta(\lambda T[y] - V[y]) = 0, \quad (XV)$$

wobei zur Konkurrenz alle zulässigen Funktionen gemäß Ziffer 3 zuzulassen sind.

Auf das gleiche Variationsproblem führt aber auch die Stabilitätsaufgabe. Führt man nämlich mit

$$U[y] \quad \text{ sowie } \quad \lambda W_0[y]$$

die potentiellen Energien der inneren Kräfte und der  $\lambda$ -fachen Grundbelastung ein, so zeichnen sich dem d'Alembertschen Prinzip zufolge die Gleichgewichtslagen vor allen anderen kinematisch möglichen durch das Verschwinden der virtuellen Arbeit, d. h. dadurch aus, daß unter Beschränkung auf zulässige Funktionen  $y(x)$

$$\delta(U[y] + \lambda W_0[y]) = 0 \quad (6.2)$$

ist. Mit dem Ersatz von  $U[y]$  durch  $V[y]$  und von  $-W_0[y]$  durch  $T[y]$  geht aber (6.2) in (XV) über, und damit ist die Analogie zwischen dem Schwingungsproblem und der Stabilitätsaufgabe – wenigstens soweit die letztere mindestens semidefinit ist – vollkommen.

Man braucht jetzt zwischen den beiden Aufgaben nicht mehr zu unterscheiden und kann, indem man (I) bis (XV) zusammenfaßt und die Energien neu mit  $\Phi$  bzw.  $\Psi$  bezeichnet, das *natürliche Eigenwertproblem* allgemein durch die Variationsaufgabe

$$\delta(\Phi[y] - \lambda \Psi[y]) = 0 \quad (6.3)$$

definieren, die unter Beschränkung auf zulässige und damit insbesondere den kinematischen Randbedingungen

$$R_{\mu}[y] = \sum_{\nu=0}^{m-1} (\alpha_{\mu\nu} y_a^{(\nu)} + \beta_{\mu\nu} y_b^{(\nu)}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, s \leq 2m) \quad (6.4)$$

genügende Funktionen  $y(x)$  zu lösen ist. Dabei setzen sich die Ausdrücke  $\Phi[y]$  und  $\Psi[y]$  gemäß

$$\Phi[y] = \int_a^b \bar{\Phi}[y] dx + \Phi_t[y], \quad \Psi[y] = \int_a^b \bar{\Psi}[y] dx + \Psi_t[y] \quad (6.5)$$

aus je zwei Anteilen zusammen, und zwar ist der Reihe nach

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}[y] &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^m c_{ik}(x) y^{(i)} y^{(k)}, & (c_{ki} &= c_{ik}, c_{mm} > 0), \\ \bar{\Psi}[y] &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^n m_{ik}(x) y^{(i)} y^{(k)}, & (m_{ki} &= m_{ik}), \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_t[y] &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{m-1} (A_{ik} y_a^{(i)} y_a^{(k)} + 2 B_{ik} y_a^{(i)} y_b^{(k)} + C_{ik} y_b^{(i)} y_b^{(k)}), \\ & \quad (A_{ki} = A_{ik}, C_{ki} = C_{ik}), \\ \Psi_t[y] &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{m-1} (D_{ik} y_a^{(i)} y_a^{(k)} + 2 E_{ik} y_a^{(i)} y_b^{(k)} + F_{ik} y_b^{(i)} y_b^{(k)}), \\ & \quad (D_{ki} = D_{ik}, F_{ki} = F_{ik}) \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

und zudem

$$n < m. \quad (6.8)$$

Ferner sind die in (6.4) bis (6.7) auftretenden Koeffizienten sämtlich reell; die  $c_{ik}(x)$ ,  $m_{ik}(x)$  werden als genügend oft stetig differenzierbar und die kinematischen Randbedingungen (6.4) als linear unabhängig vorausgesetzt.

Gilt neben (6.3) bis (6.8) für zulässige Funktionen

$$\Phi[y] \geq 0, \quad \Psi[y] > 0, \quad (y \equiv 0), \quad (6.9)$$

so soll das Eigenwertproblem als *semidefinit* oder *definit* bezeichnet werden, je nachdem in der ersten Ungleichung (6.9) das Gleichheitszeichen zuzulassen ist oder nicht.

Ist  $y(x)$  eine zulässige Funktion, so läßt sich jede, in ihrer Nachbarschaft verlaufende, zulässige Funktion in der Form  $y(x) + \varepsilon \eta(x)$  darstellen, wobei  $\varepsilon$  eine genügend kleine reelle Konstante und  $\eta(x)$  selbst eine zulässige Funktion



ist. Die im Sinne des Variationsproblems (6.3) zulässigen Variationen von  $y$  sind also zulässige Funktionen der Form  $\delta y = \varepsilon \eta$ . Stellt man den in  $y$  und seinen Ableitungen quadratischen Ausdrücken (6.5) die in  $y$  und  $\eta$  symmetrischen Bilinear ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \Phi[y, \eta] &= \int_a^b \sum_{i,k=0}^m c_{ik} y^{(i)} \eta^{(k)} dx + \\ &+ \sum_{i,k=0}^{m-1} [A_{ik} y_a^{(i)} \eta_a^{(k)} + B_{ik} (y_a^{(i)} \eta_b^{(k)} + \eta_a^{(i)} y_b^{(k)}) + C_{ik} y_b^{(i)} \eta_b^{(k)}], \\ \Psi[y, \eta] &= \int_a^b \sum_{i,k=0}^n m_{ik} y^{(i)} \eta^{(k)} dx + \\ &+ \sum_{i,k=0}^{m-1} [D_{ik} y_a^{(i)} \eta_a^{(k)} + E_{ik} (y_a^{(i)} \eta_b^{(k)} + \eta_a^{(i)} y_b^{(k)}) + F_{ik} y_b^{(i)} \eta_b^{(k)}] \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

zur Seite, so erhält man für die zugehörigen Variationen von  $\Phi$  und  $\Psi$

$$\delta \Phi[y] = \varepsilon \Phi[y, \eta], \quad \delta \Psi[y] = \varepsilon \Psi[y, \eta]. \quad (6.11)$$

Man kann daher (6.3) durch

$$\Phi[y, \eta] - \lambda \Psi[y, \eta] = 0 \quad (6.12)$$

ersetzen und hat

**Satz 4:** Die zulässige Funktion  $y(x)$  ist dann und nur dann eine Lösung des natürlichen Eigenwertproblems, d. h. eine *Eigenfunktion*, wenn eine Zahl  $\lambda$ , d. h. ein *Eigenwert* existiert, so daß für beliebige zulässige Funktionen  $\eta(x)$  die Beziehung (6.12) erfüllt ist.

Die Bilinear ausdrücke (6.10) genügen übrigens, wie hier noch festgehalten werden soll, den bereits erwähnten Symmetriebedingungen

$$\Phi[y, \eta] = \Phi[\eta, y], \quad \Psi[y, \eta] = \Psi[\eta, y] \quad (6.13)$$

und führen mit  $\eta \equiv y$  zufolge

$$\Phi[y, y] = 2 \Phi[y], \quad \Psi[y, y] = 2 \Psi[y] \quad (6.14)$$

auf die doppelten Energien zurück.

## 7. Die Normalformen

Die Eulersche Differentialgleichung und die dynamischen Randbedingungen des natürlichen Eigenwertproblems werden durch Ausführung der Variation (6.3) gewonnen. Es empfiehlt sich indessen, die Ausdrücke  $\Phi[y]$  und  $\Psi[y]$  vorerst auf ihre sogenannten Normalformen zu bringen.

Zu diesem Zweck sei aus dem Integral

$$\Phi_s[y] = \int_a^b \bar{\Phi}[y] dx, \quad (7.1)$$

dessen Integrand nach (6. 6) den Aufbau

$$\bar{\Phi}[y] = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} c_{00} y^2 + c_{01} y y' + \dots + c_{0m} y y^{(m)} + \\ + c_{10} y' y + c_{11} y'^2 + \dots + c_{1m} y' y^{(m)} + \\ + \dots \\ + c_{m0} y^{(m)} y + c_{m1} y^{(m)} y' + \dots + c_{mm} y^{(m)2} \end{array} \right\}, \quad (c_{ki} = c_{ik}) \quad (7.2)$$

hat, mit

$$\int_b^a c_{ik} y^{(i)} y^{(k)} dx, \quad (i < k-1 < m)$$

der Beitrag eines beliebigen Doppelproduktes herausgegriffen, das nicht aus unmittelbar der Hauptdiagonale anliegenden Summanden besteht. Dieser Beitrag läßt sich durch partielle Integration auf die Gestalt

$$c_{ik} y^{(i)} y^{(k-1)} \Big|_a^b - \int_a^b c_{ik} y^{(i+1)} y^{(k-1)} dx - \int_a^b c'_{ik} y^{(i)} y^{(k-1)} dx$$

bringen und damit durch Integrale und Randterme ersetzen, in denen die höchste vorkommende Ableitung nur noch die Ordnung  $k-1$  aufweist. Durch Vereinigung der Integrale mit den entsprechenden Termen in (7. 1) und Wiederholung des Verfahrens kann man das Schema (7. 2) des Integranden unter fortgesetzter Ausscheidung von Randtermen bis auf Summanden abtragen, die in der Hauptdiagonale stehen oder ihr unmittelbar anliegen. Dabei erhalten die verbleibenden Summanden, da jede partielle Integration als Schritt in horizontaler bzw. in horizontaler und vertikaler Richtung auf die Hauptdiagonale zu gedeutet werden kann, mit Ausnahme weniger Terme, unter denen sich insbesondere  $c_{mm} y^{(m)2}/2$  befindet, im allgemeinen neue Beiwerte, und die Randterme lassen sich zu einer quadratischen Form von

$$y_a, y'_a, \dots, y_a^{(m-1)}; \quad y_b, y'_b, \dots, y_b^{(m-1)} \quad (7.3)$$

zusammenfassen.

Die Beiträge der verbleibenden Doppelprodukte, die von der Gestalt

$$\int_a^b a_{i,i+1} y^{(i)} y^{(i+1)} dx, \quad (i < m)$$

sind, lassen sich zufolge

$$\int_a^b a_{i,i+1} y^{(i)} y^{(i+1)} dx = a_{i,i+1} y^{(i)2} \Big|_a^b - \int_a^b a_{i,i+1} y^{(i+1)} y^{(i)} dx - \int_a^b a'_{i,i+1} y^{(i)2} dx$$

durch

$$\frac{1}{2} a_{i,i+1} y^{(i)2} \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b a'_{i,i+1} y^{(i)2} dx$$

ersetzen und damit unter Absonderung weiterer Randterme der Form (7.3) auf Hauptdiagonalelemente zurückführen, wobei  $c_{mm} y^{(i)2}/2$  wiederum keinen Beitrag erhält. Damit ist aber  $\Phi_s[y]$  auf die *Normalform*

$$\Phi_s[y] = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i=0}^m f_i(x) y^{(i)2} dx + \frac{1}{2} F_0[y] \quad (7.4)$$

reduziert, in der im Integranden nur noch Quadrate vorkommen,  $F_0[y]$  eine quadratische Form der Randwerte (7.3), also vom gleichen Aufbau wie  $\Phi_t[y]$  in (6.7) und mit Rücksicht darauf, daß sich der Beiwert von  $y^{(m)2}$  nicht geändert hat,

$$f_m(x) = c_{mm}(x) > 0 \quad (7.5)$$

ist.

In analoger Weise kann man

$$\Psi_s[y] = \int_a^b \bar{\Psi}[y] dx \quad (7.6)$$

auf die Normalform

$$\Psi_s[y] = \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i=0}^n g_i(x) y^{(i)2} dx + \frac{1}{2} G_0[y] \quad (7.7)$$

bringen, in der  $G_0[y]$  mit Rücksicht auf (6.8) wieder eine quadratische Form der Randwerte (7.3) und

$$g_n(x) = m_{nn}(x) \quad (7.8)$$

ist.

Mit (7.4) und (7.7) erhält man für die Ausdrücke (6.5) die *Normalformen*

$$\left. \begin{aligned} \Phi[y] &= \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i=0}^m f_i(x) y^{(i)2} dx + \frac{1}{2} F[y], \\ \Psi[y] &= \frac{1}{2} \int_a^b \sum_{i=0}^n g_i(x) y^{(i)2} dx + \frac{1}{2} G[y], \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

wenn man in den quadratischen Formen

$$\frac{1}{2} F[y] = \Phi_t[y] + \frac{1}{2} F_0[y], \quad \frac{1}{2} G[y] = \Psi_t[y] + \frac{1}{2} G_0[y] \quad (7.10)$$

sämtliche Randterme, nämlich diejenigen aus (7.4) und (7.7) mit (6.7) zusammenfaßt. Dabei enthalten die quadratischen Formen (7.10) gemäß (6.7) nur die Randwerte (7.3), und ihre Koeffizienten sind reell, wie übrigens auch die Funktionen  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$ . Schließlich nehmen die Bilinearausdrücke (6.10), wenn man von (7.9) ausgeht, die Normalformen

$$\left. \begin{aligned} \Phi[y, \eta] &= \int_a^b \sum_{i=0}^m f_i y^{(i)} \eta^{(i)} dx + F[y, \eta], \\ \Psi[y, \eta] &= \int_a^b \sum_{i=0}^n g_i y^{(i)} \eta^{(i)} dx + G[y, \eta] \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

an, wobei  $F[y, \eta]$  die zu  $F[y]$  gehörende symmetrische Bilinearform und  $G[y, \eta]$  diejenige von  $G[y]$  ist.

Weil  $m_{nn}$  im Gegensatz zu  $c_{mm}$  nicht positiv zu sein braucht, läßt sich der Ungleichung (7.5) in (7.8) keine entsprechende an die Seite stellen. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß  $g_n(x)$  identisch verschwindet, so daß die Zahl  $n$  durch eine kleinere ersetzt werden kann. Unter der Annahme, daß alle  $g_i(x)$  identisch Null seien, könnten aber zulässige Funktionen  $y(x)$  angegeben werden, die an den Rändern  $a, b$  mit sämtlichen Ableitungen bis zur  $(m-1)$ -ten einschließlich verschwinden, im Inneren des Intervalls  $a \leq x \leq b$  aber nicht identisch Null wären und nach der zweiten Beziehung (7.9) auf ein verschwindendes  $\Psi[y]$  führen würden. Dies trifft z. B. beim Schwingungsproblem von Ziffer 2 zu, wenn  $q = 0$  gesetzt und damit die Masse der Welle gegenüber der Scheibenmasse vernachlässigt wird. Der Eigenwert  $\sigma^2$  tritt dann nicht mehr in der Differentialgleichung (2.1), sondern nur noch in den dynamischen Randbedingungen (2.3) auf, so daß ein Eigenwertproblem mit endlichem Freiheitsgrad entsteht.

Die Existenz von nicht identisch verschwindenden zulässigen Funktionen, für die  $\Psi[y]$  Null wird, widerspricht aber der zweiten Forderung (6.9). Man hat demnach bei semidefiniten sowie definiten Problemen – mindestens nach der Reduktion von  $n$  –

$$g_n(x) \equiv 0. \quad (7.12)$$

Bei der überwiegenden Mehrzahl der bekannten Probleme – beispielsweise auch bei der Schwingungs- und der Stabilitätsaufgabe von Ziffer 2 – liegen die Funktionen  $\Phi[y]$  und  $\Psi[y]$  von Anfang an in der Normalform vor, so daß man



sich fragen kann, ob es wirklich nötig sei, von den allgemeineren Formen (6. 5), (6. 6) auszugehen. Bei der Betrachtung einfacherer Beispiele drängt sich gar die Vermutung auf, daß die Normalform – mindestens bei geschickter Wahl der Veränderlichen – ausschließlich auftrete. Diese Vermutung bestätigt sich indessen bei näherem Zusehen nicht; schon beim in seiner Ebene gebogenen Kreisring wird nämlich – wenn man mit  $x$  das Azimut und mit  $y$  die radiale Verschiebung bezeichnet – die Formänderungsenergie<sup>1)</sup> nicht in der Normalform erhalten.

## 8. Mathematische Formulierung des natürlichen Eigenwertproblems; zugehörige Differentialgleichung

Nach Ziffer 6 und 7 besteht die natürliche Eigenwertaufgabe in der Ermittlung der Werte  $\lambda$  und der zulässigen Funktionen  $y(x)$ , die für jede zulässige Variation  $\eta(x)$  der Bedingung

$$\Phi[y, \eta] - \lambda \Psi[y, \eta] = 0 \quad (8.1)$$

genügen. Dabei sind unter zulässigen Funktionen diejenigen reellen  $y(x)$  zu verstehen, welche die linear unabhängigen, mit reellen Koeffizienten  $\alpha_{\mu\nu}$ ,  $\beta_{\mu\nu}$  gebildeten kinematischen Randbedingungen

$$R_\mu[y] = \sum_{\nu=0}^{m-1} (\alpha_{\mu\nu} y_a^{(\nu)} + \beta_{\mu\nu} y_b^{(\nu)}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, s \leq 2m) \quad (8.2)$$

erfüllen, im Intervall  $a \leq x \leq b$   $(m-1)$ -mal stetig differenzierbar sind und eine stückweise stetige  $m$ -te Ableitung besitzen. Ferner sind

$$\left. \begin{aligned} \Phi[y, \eta] &= \int_a^b \sum_{i=0}^m f_i y^{(i)} \eta^{(i)} dx + F[y, \eta], \\ \Psi[y, \eta] &= \int_a^b \sum_{i=0}^n g_i y^{(i)} \eta^{(i)} dx + G[y, \eta] \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

reelle, symmetrische Bilinearausdrücke, die den Bedingungen

$$m > n \quad (8.4)$$

und

$$f_m(x) > 0 \quad (8.5)$$

<sup>1)</sup> Vgl. S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability* (New York und London 1936), S. 209.

genügen, und  $F[y, \eta]$ ,  $G[y, \eta]$  reelle, symmetrische Bilinearformen in den Randwerten

$$\left. \begin{aligned} & y_a, y'_a, \dots, y_a^{(m-1)}; y_b, y'_b, \dots, y_b^{(m-1)}, \\ & \eta_a, \eta'_a, \dots, \eta_a^{(m-1)}; \eta_b, \eta'_b, \dots, \eta_b^{(m-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Ist zudem

$$\Phi[y, y] \geq 0, \quad \Psi[y, y] > 0, \quad (y \equiv 0) \quad (8.7)$$

und damit gemäß (7.12) auch

$$g_n(x) \equiv 0, \quad (8.8)$$

so wird das Problem als semidefinit bzw. definit bezeichnet, je nachdem in der ersten Ungleichung (8.7) das Gleichheitszeichen zuzulassen ist oder nicht.

Der erste Bilinearausdruck (8.3) stellt, mit  $\varepsilon$  multipliziert, die Variation von  $\Phi[y]$  beim Übergang von der zulässigen Funktion  $y$  auf die ebenfalls zulässige Funktion  $y + \varepsilon \eta$  dar. Er läßt sich durch partielle Integration auf die Gestalt

$$\Phi[y, \eta] = \int_a^b M_{-1}[y] \eta \, dx + \left[ \sum_{i=0}^{m-1} M_i[y] \eta^{(i)} \right]_a^b + F[y, \eta] \quad (8.9)$$

bringen, wenn man zur Abkürzung

$$M_i[y] = \sum_{k=i+1}^m (-1)^{k-i-1} (f_k y^{(k)})^{(k-i-1)}, \quad (i = -1, 0, 1, \dots, m-1) \quad (8.10)$$

setzt. Entsprechend geht der zweite Ausdruck (8.3) mit

$$N_i[y] = \sum_{k=i+1}^n (-1)^{k-i-1} (g_k y^{(k)})^{(k-i-1)}, \quad (i = -1, 0, 1, \dots, n-1) \quad (8.11)$$

in

$$\Psi[y, \eta] = \int_a^b N_{-1}[y] \eta \, dx + \left[ \sum_{i=0}^{n-1} N_i[y] \eta^{(i)} \right]_a^b + G[y, \eta] \quad (8.12)$$

über.

Setzt man (8.9) und (8.12) in die Variationsgleichung (8.1) ein und verlangt man zunächst nur, daß diese für diejenigen zulässigen Variationen von  $\eta$  erfüllt sei, für die an beiden Rändern  $\eta = \eta' = \dots = \eta^{(m-1)} = 0$  ist, so kommt man in der bekannten Weise auf die *Differentialgleichung*

$$M[y] = \lambda N[y] \quad (8.13)$$

des Eigenwertproblems, die nach (8.10) und (8.11) mit den linearen, selbst-

adjungierten Differentialausdrücken

$$M[y] = M_{-1}[y] = \sum_{k=0}^m (-1)^k (f_k y^{(k)})^{(k)}, \quad N[y] = N_{-1}[y] = \sum_{k=0}^n (-1)^k (g_k y^{(k)})^{(k)} \quad (8.14)$$

gebildet ist. Es gilt mithin

**Satz 5:** Natürliche Eigenwertprobleme führen auf die lineare Differentialgleichung (8. 13), in der  $M$  und  $N$  selbstadjungierte, mit den reellen Funktionen  $f_k(x)$  bzw.  $g_k(x)$  gebildete Differentialausdrücke der Form (8. 14) sind. Zwischen ihren Ordnungen  $2m$  und  $2n$  besteht die Ungleichung (8. 4); die Funktion  $f_m$  genügt der Ungleichung (8. 5) und  $g_n$  bei mindestens semidefiniten Aufgaben der Bedingung (8. 8).

Man kommt also hinsichtlich der Differentialgleichung bei natürlichen Problemen mit zwei geringfügigen Abweichungen auf die Beziehungen, die bei L. COLLATZ<sup>1)</sup> als Voraussetzungen formuliert sind. Die erste Abweichung besteht in der Verschärfung (8. 5) der Collatzschen Annahme  $f_m \neq 0$ , die zweite im Verzicht auf die Forderung  $g_n \neq 0$ , die nur bei mindestens semidefiniten Aufgaben in der abgeschwächten Form (8. 8) erfüllt ist.

Daß sich die Annahme  $g_n = 0$  physikalisch nicht vertreten läßt, zeigt schon die Schwingungsaufgabe von Ziffer 2, wo aus (2. 5)  $g_n = g_1 = \varrho I$  folgt. Dieser Ausdruck kann zwar nicht negativ, wohl aber in gewissen Teilintervallen, in denen die Welle genügend dünn ist, vernachlässigt und damit gleich Null gesetzt werden, ohne daß das Schwingungsproblem seinen Charakter ändern würde.

## 9. Die Randbedingungen

Damit die Variationsgleichung (8. 1) für alle zulässigen Variationen  $\eta$  und nicht nur für diejenigen erfüllt ist, mit denen in Ziffer 8 die Differentialgleichung erhalten wurde, muß nach (8. 9) und (8. 12) für jeden Wertesatz

$$\eta_a, \eta'_a, \dots, \eta_a^{(m-1)}; \eta_b, \eta'_b, \dots, \eta_b^{(m-1)}, \quad (9.1)$$

der den kinematischen Randbedingungen (8. 2), d. h. den Forderungen

$$R_\mu[\eta] = \sum_{v=0}^{m-1} (\alpha_{\mu v} \eta_a^{(v)} + \beta_{\mu v} \eta_b^{(v)}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, s \leq 2m) \quad (9.2)$$

genügt,

$$\left[ \sum_{i=0}^{m-1} M_i[y] \eta^{(i)} \right]_a^b + F[y, \eta] - \lambda \left\{ \left[ \sum_{i=0}^{n-1} N_i[y] \eta^{(i)} \right]_a^b + G[y, \eta] \right\} = 0 \quad (9.3)$$

sein.

<sup>1)</sup> L. COLLATZ, a. a. O., S. 57.

Die Ausdrücke  $F[y, \eta]$ ,  $G[y, \eta]$  sind nach Ziffer 7 symmetrische Bilinearformen in den Randwerten (7.3) und (9.1), die den gleichen Aufbau wie die Bilinearformen in (6.10) haben und sich mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} P_{ia}[y] &= \frac{\partial F[y, \eta]}{\partial \eta_a^{(i)}}, & P_{ib}[y] &= \frac{\partial F[y, \eta]}{\partial \eta_b^{(i)}}, \\ Q_{ia}[y] &= \frac{\partial G[y, \eta]}{\partial \eta_a^{(i)}}, & Q_{ib}[y] &= \frac{\partial G[y, \eta]}{\partial \eta_b^{(i)}} \end{aligned} \quad (9.4)$$

als Linearkombinationen

$$F[y, \eta] = \sum_{i=0}^{m-1} (P_{ia} \eta_a^{(i)} + P_{ib} \eta_b^{(i)}), \quad G[y, \eta] = \sum_{i=0}^{m-1} (Q_{ia} \eta_a^{(i)} + Q_{ib} \eta_b^{(i)}) \quad (9.5)$$

der Randwerte (9.1) anschreiben lassen. Bezeichnet man die Randwerte der Differentialausdrücke (8.10), (8.11) mit  $M_{ia}$ ,  $M_{ib}$  bzw.  $N_{ia}$ ,  $N_{ib}$ , und setzt man allenfalls

$$N_n = N_{n+1} = \dots = N_{m-1} = 0,$$

so kann man (9.3) durch

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m-1} [(M_{ib} + P_{ib}) \eta_b^{(i)} - (M_{ia} - P_{ia}) \eta_a^{(i)}] - \\ &- \lambda \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} [(N_{ib} + Q_{ib}) \eta_b^{(i)} - (N_{ia} - Q_{ia}) \eta_a^{(i)}] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

ersetzen, und hiefür erhält man mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} S_{ia}[y] &= M_{ia} - P_{ia} - \lambda(N_{ia} - Q_{ia}), \\ S_{ib}[y] &= M_{ib} + P_{ib} - \lambda(N_{ib} + Q_{ib}), \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (i = 0, 1, \dots, m-1) \end{array} \right. \quad (9.7)$$

schließlich

$$\sum_{i=0}^{m-1} (S_{ib}[y] \eta_b^{(i)} - S_{ia}[y] \eta_a^{(i)}) = 0. \quad (9.8)$$

Gemäß (8.5) und (8.10) sind die  $M_{ia}$ ,  $M_{ib}$  lineare Differentialausdrücke  $(2m-i-1)$ -ter Ordnung, zufolge (8.11) die  $N_{ia}$ ,  $N_{ib}$  solche  $(2n-i-1)$ -ter, nach (8.4) mithin niedrigerer Ordnung in  $y_a$  bzw.  $y_b$ , während die  $P_{ia}$ ,  $P_{ib}$ ,  $Q_{ia}$ ,  $Q_{ib}$  gar nur von der Ordnung  $m-1$  sind. Die durch (9.7) definierten Größen  $S_{ia}$ ,  $S_{ib}$  sind demnach lineare Differentialausdrücke der Ordnungen  $m \leq 2m-i-1 \leq 2m-1$  in den Randwerten  $y_a$ ,  $y_b$ , und da keine zwei von ihnen die gleichen Argumente und gleichzeitige dieselbe Ordnung haben, sind sie sämtlich linear unabhängig.



Die  $s$  linear unabhängigen Gleichungen (9. 2) besitzen insgesamt  $2m - s$  linear unabhängige Lösungssysteme (9. 1). Die Forderung (9. 8) verlangt daher das Verschwinden von  $2m - s$  unabhängigen Linearkombinationen der  $S_{ia}$ ,  $S_{ib}$ , d. h. von ebenso vielen unabhängigen linearen Differentialausdrücken  $m$ -ter bis  $(2m - 1)$ -ter Ordnung in  $y_a$  und  $y_b$ , deren Koeffizienten im allgemeinen aber den Eigenwert  $\lambda$  enthalten. Es gilt also – wie R. GRAMMEL<sup>1)</sup> in verschiedenen Sonderfällen gezeigt hat – allgemein

*Satz 6:* Das Variationsprinzip liefert bei natürlichen Problemen als Ergänzung der kinematischen Randbedingungen

$$R_\mu[y] = \sum_{v=0}^{m-1} (\alpha_{\mu v} y_a^{(v)} + \beta_{\mu v} y_b^{(v)}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, s \leq 2m) \quad (9. 9)$$

$2m - s$  weitere linear unabhängige Forderungen, die in der Gestalt

$$R_\mu[y] = \sum_{v=0}^{2m-1} (\alpha_{\mu v} y_a^{(v)} + \beta_{\mu v} y_b^{(v)}) = 0, \quad (\mu = s + 1, s + 2, \dots, 2m) \quad (9. 10)$$

angeschrieben werden können, und deren Koeffizienten reell sind, im allgemeinen aber den Eigenwert  $\lambda$  enthalten.

Um die Bedingungen (9. 10) explizit aufzustellen, beruft man sich auf die lineare Unabhängigkeit der kinematischen Randbedingungen (9. 2) und löst diese nach  $s$  unter den Randwerten (9. 1) auf. Die übrigbleibenden Randwerte sind dann kinematisch – und, wie sich sofort zeigen wird, auch dynamisch – unabhängig; sie definieren die allgemeinste virtuelle Verschiebung des Trägers und können als *freie Randwerte* bezeichnet werden. Führt man in (9. 8) die Randwerte sämtlich auf die freien zurück, so kommt

$$\sum' (S'_{ib}[y] \eta_b^{(i)} - S'_{ia}[y] \eta_a^{(i)}) = 0, \quad (9. 11)$$

wobei die  $S'_{ia}$ ,  $S'_{ib}$  Linearkombinationen der  $S_{ia}$ ,  $S_{ib}$  sind und der Strich beim Summenzeichen andeutet, daß nur noch über die freien Randwerte zu summieren ist. Mit der Forderung, daß (9. 11) für jeden Satz freier Randwerte erfüllt sei, gewinnt man dann die  $2m - s$  Randbedingungen (9. 10) in der Form

$$S'_{ia}[y] = 0, \quad S'_{ib}[y] = 0. \quad (9. 12)$$

Da die  $S_{ia}$ ,  $S_{ib}$  linear unabhängige Differentialausdrücke  $m$ -ter bis  $(2m - 1)$ -ter Ordnung sind, weisen auch ihre Linearkombinationen, insbesondere also die  $S'_{ia}$ ,  $S'_{ib}$  sowie deren Linearkombinationen, mindestens die Ordnung  $m$  auf. Es ist daher unmöglich, durch Kombination der Randbedingungen (9. 12) bzw. (9. 10) solche der Form (9. 9) zu erhalten. Die neuen Randbedingungen

<sup>1)</sup> C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, a. a. O., S. 168.

sind mithin nicht kinematischer, sondern *dynamischer* oder im Sinne von E. KAMKE<sup>1)</sup> *restlicher* Natur. Es gilt demnach

**Satz 7:** Die vom Variationsprinzip gelieferten Randbedingungen (9. 10) sind dynamische oder restliche und ergänzen die kinematischen oder wesentlichen (9. 9) zu einem System von  $2m$  linear unabhängigen Randbedingungen.

Schließlich folgt daraus, daß die linken Seiten von (9. 12) Linearkombinationen der rechten Seiten von (9. 7) sind,

**Satz 8:** Die dynamischen Randbedingungen enthalten den Eigenwert  $\lambda$  höchstens in linearer Form.

Mit diesen Ergebnissen sind die Voraussetzungen, die L. COLLATZ<sup>2)</sup> an die Randbedingungen stellt, bestätigt, gleichzeitig aber wesentlich präzisiert. Einmal durch die bereits in Ziffer 5 ausgesprochene Feststellung, daß die kinematischen Randbedingungen (9. 9) den Eigenwert  $\lambda$  nicht enthalten, so daß zulässige Funktionen im Gegensatz zu den sogenannten Vergleichsfunktionen stets definiert sind. Dann aber auch mit der Bemerkung, daß  $\lambda$  in den dynamischen Randbedingungen (9. 10) nur in linearer Form auftreten kann.

Stellt die Funktion  $y(x)$  zusammen mit dem Wert  $\lambda$  eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (8. 13) und der Randbedingungen (9. 9), (9. 10) dar, so ist sie eine zulässige Funktion, welche die Forderung (8. 1) für beliebige zulässige Variationen  $\eta$  befriedigt. Die Ergebnisse von Ziffer 8 und 9 führen also zusammen mit Satz 4 auf

**Satz 9:** Die Eigenfunktionen  $y(x)$  – und nur diese – lösen zusammen mit den zugehörigen Eigenwerten  $\lambda$  die Differentialgleichung (8. 13) und die Randbedingungen (9. 9), (9. 10).

Bei vielen Aufgaben kommt der Eigenwert  $\lambda$  auch in den dynamischen Randbedingungen nicht vor. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist gemäß (9. 3), daß für beliebige zulässige Funktionen  $y$  und  $\eta$

$$\left[ \sum_{i=0}^{n-1} N_i[y] \eta^{(i)} \right]_a^b + G[y, \eta] = 0 \quad (9. 13)$$

ist. Bemerkenswert ist, daß hiezu die – durch das Beispiel des längsschwingenden, mit einer Endmasse versehenen Stabes nahegelegte – Forderung, daß der Träger keine Bewegungsenergie besitze, nicht ausreicht. Dies zeigt sich schon im Fall der fliegenden Welle (Ziffer 2), bei der man durch Weglassen der Scheibe, d. h. durch Nullsetzen von  $M$  und  $\Theta$  die zweite Randbedingung (2. 3) nicht von  $\sigma^2$  zu befreien vermag. In der Tat folgt auch dann, wenn von Anfang an die Normalformen vorliegen, nach (7. 7) also  $G_0[y] \equiv 0$  ist, aus dem Verschwinden von  $\Psi_i[y]$  nach (7. 10) zwar  $G[y] \equiv 0$ , aber noch nicht die Gültigkeit von (9. 13).

<sup>1)</sup> Vgl. L. COLLATZ, a. a. O., S. 58.

<sup>2)</sup> L. COLLATZ, a. a. O., S. 57.

Es wäre interessant, die Möglichkeit der Umkehrung der Sätze 5 bis 8 zu überprüfen, d. h. zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Eigenwertproblem natürlich (und definit bzw. semidefinit) ist, wenn seine Differentialgleichung den in Satz 5 und seine Randbedingungen den in den Sätzen 6, 7 und 8 beschriebenen Aufbau haben.

### Summary

Eigenvalue problems, arising from questions of stability or in connection with vibrations, may be approached (a) as problems of the calculus of variations, (b) by establishing their differential equation, (c) by means of their integral (or integrodifferential) equation. Up to the present, method (b) has been farther developed than the other ones; still it does not apply to problems whose eigenvalue figures explicitly in the boundary conditions. In order to overcome this defect, it is advisable to use method (a) which, from a physical point of view, offers the advantage of facilitating the mathematical interpretation of mechanical restrictions and vice versa.

The authors intend (i) to generalize the theory of eigenvalues for the above mentioned case and (ii) to establish the connections between methods (a), (b), and (c) on a most general scale, viz. for so called "natural problems". In this first communication, they connect methods (a) and (b), restricting themselves to the case of one independent and one dependant variable.

(Eingegangen: 8. 7. 49.)

## Measurements of Electric Dipole Moments by a Microwave Resonance Method

By GEORGE W. EPPRECHT, Pasadena<sup>1)</sup>

The dipole moments of ozone, Freon-12 (dichlorodifluoromethane  $\text{CCl}_2\text{F}_2$ ) and Freon-13 (monochlorotrifluoromethane  $\text{CClF}_3$ ) have been determined at a frequency of 9,400 megacycles. Using the dielectric constant  $\epsilon$  as a starting point, polarisation is obtained by the Clausius-Mosotti expression. According to Debye the dipole moment can be calculated from its variation with temperature:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \cdot \frac{M}{d} = \frac{4\pi}{3} N_0 \left\{ \alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right\}. \quad (1)$$

Here  $N = N_0 d/M$  is the Loschmidt number and  $k$  the Boltzmann constant. In

<sup>1)</sup> 1947-8 graduate exchange student and research fellow at the California Institute of Technology, Pasadena.

our case the dielectric constant has been determined in relation to the one of a known gas, but the method could easily be adapted for absolute measurements.

The above formulæ are only valid for gases at low pressure or for highly diluted liquids. Working with gases only, these conditions are fulfilled in our case. Strictly speaking, the described method does not yield values for the dielectric constant but rather for the velocity of propagation of electromagnetic waves in the medium (or its index of refraction). It can be shown numerically that for a paramagnetic gas such as oxygen the influence of the magnetic polarisability is only about  $1/300$  of the electric polarisability. With our accuracy of some percents paramagnetism can therefore be entirely neglected. Also no effects of saturation will occur at the field strengths which are present in the cavities which means that the dipoles oscillate only with very small angles (even at breakdown field strength the angle of rotation is only of the order of  $\frac{1}{2}$  degree).

Much more critical is the influence of axial inertia at the high frequencies used. Without accurate knowledge of the molecular structure, however, we can only make a very rough estimate of this influence. In addition to this dipolar absorption selective absorption bands in this range are possible. Various substances with molecular resonances in the centimeter-range have already been found and their special properties have been made use of ( $\text{NH}_3$  "atomic clock"). With 3 cm waves there are probably no complications in measuring ozone but when dealing with the results of the Freons some precaution is called for.

### Description of Method

Two cavities are fed by a klystron (type 723) whose repeller voltage is modulated to sweep the frequency over a certain range in which lie the resonances of the two cavities. The rectified output of the two cavities is amplified and fed with opposite sign into a mixer stage. The result is observed on an oscilloscope whose horizontal deflection is proportional to the modulating repeller voltage. The principle now is to tune the cavities to the same frequency by adjusting the two resonance peaks on the oscilloscope to coincidence (Fig. 1). Best results are obtained if the two cavities have a slightly different  $Q$ .

One of the cavities is mounted in a vacuum tight chamber which contains the known standard gas. Means are provided to adjust the pressure in this cavity to anywhere between 0 and 760 mm Hg. Thus, using e. g. oxygen as reference gas, the dielectric range from 1.000000 to 1.000530 is extended to a scale of 760 mm. Into a thermostat is built the second cavity, designed to make measurements with a continuous gas flow. Measurements are made in the following manner: both cavities are filled with the standard gas and tuned,



first by adjusting the length of one cavity by a micrometer, then by varying the gas pressure of the standard gas. Now cavity 1 is filled with the test gas (or its mixture with a known carrier gas) and the pressure in cavity 2 readjusted to frequency coincidence. Using the subscripts 1 and 2 for the cavities,

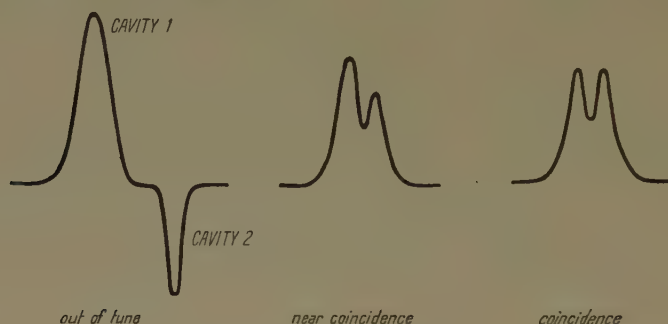


Fig. 1. Oscilloscope patterns.

$a$  and  $b$  for the first and second frequency coincidence respectively, further 0 for the normal condition of the gases ( $0^{\circ}\text{C}$ , 760 mm Hg), we write:

$$\delta_{1b0} = \frac{T_{1b}}{p_{1b}} \left\{ \frac{\delta_{1a0} p_{1a}}{T_{1a}} - \frac{\delta_{2a0} p_{2a}}{T_{2a}} + \frac{\delta_{2a0} p_{2b}}{T_{2b}} \right\}, \quad (\delta = \varepsilon - 1). \quad (2)$$

Gas mixture formulæ are applied if the gas 1  $b$  is a mixture of the test gas and a known standard. If the dielectric constant of the test gas is higher than the one of the standard gas, we fill the pressure chamber with the test gas and the evaluation follows the same line.

The accuracy of this method depends primarily on the  $Q$  of the cavities. To keep the  $Q$  value high, only loose coupling to input and output of the cavities may be used resulting in a rather low output from the detectors. Under these circumstances complete elimination of hum is hardly possible. Accordingly, we best choose a scanning frequency of 500 to 1000 c.p.s. in order to be able to filter out the power frequency. Good frequency and phase response up to 10 kilocycles are then sufficient for mixer and amplifier. Tuning is facilitated if the depth of modulation is variable.

Some technical details deserve special attention:

Common materials for cavities have coefficients of thermal expansion of  $1 \div 3 \times 10^{-5}$  per degree centigrade. Variations of frequency being of the same order as variations of geometrical dimensions of the cavities it is obvious, therefore, that difficulties will arise with our desired accuracy of approximately  $10^{-6}$ . In our experimental set-up cavities were designed with a temperature compensation by using metals with different thermal expansion coefficients. At the same time the temperature was kept within  $1^{\circ}\text{C}$  by means of a thermo-

stat. It would be better still to use Invar steel or quartz with metallized surfaces as material for the cavities. This would enable absolute measurements. A suitable cavity provided with a differential micrometer allows to take direct measurements of the change in wavelength. HINES worked with a cavity ten

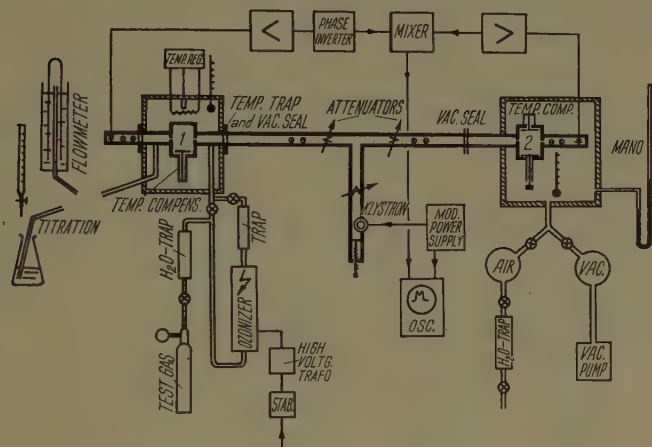


Fig. 2. Two cavity systems for measurements of the dielectric constant of gases.

wavelengths long, but with his cavity of brass the obtained accuracy was far below of what might be expected from this method.

With some gases corrosion of cavities and waveguides may set in. For the tests on ozone, the silverplated cavities had to be given a Tygon coating which, however, increases difficulties at higher temperatures. Subsequently, gold-plating was tried with success although entailing a slight lowering of the  $Q$ . Ozone being very corrosive especially at higher temperatures where decomposition also increases, various problems arise which can, however, be overcome by the use of suitable materials.

Another difficulty results from the extensive temperature range which we want to cover: connections to the cavities need not only a vacuum seal but must also be temperature insulated without substantially decreasing the performance of the waveguides. With no heat insulation the temperature fall near the cavities becomes excessive. Thus much heat is dissipated which is detrimental to other components of the equipment (crystal diodes). If the waveguides are not evacuated then, at low temperatures, water will condense on the walls. Temperature insulation was made in two steps with a pair of choke flange connections, avoiding metallic contact. Another possibility would be to design waveguides with low thermal conductivity such as glass with only a metallic film of the necessary thickness.

Measurements

Oxygen and dry air served as standard gases. Values of the dielectric constants found in literature vary by several percents. We considered the values obtained by CRAIN<sup>1)</sup> to be the most likely ones for the frequency at which we carried out our measurements:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dry air } \delta = .000572, \\ \text{oxygen } \delta = .000530 \end{array} \right\} \text{ at } 0^{\circ}\text{C, 760 mm Hg.}$$

We checked up on the difference of the above values and they tallied to within 1/2%.

Impurities of carbon dioxide and especially of water with its high dipole moment greatly influence the results; so vacuum sealing is essential.

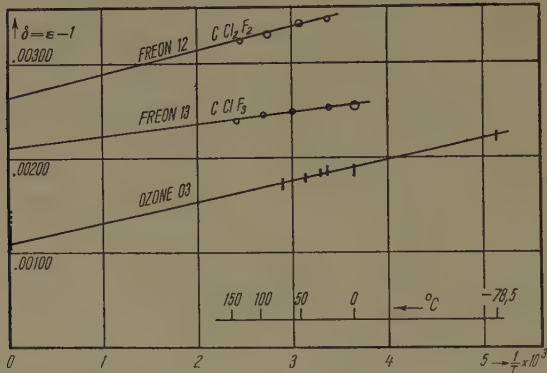


Fig. 8. Variation of the dielectric constant with temperature.

If the error due to each individual component is not to exceed .1 % this corresponds to the following percentages:

water	.005%
air (with 3% abs. humidity)	.16 %
CO <sub>2</sub>	.15 %
N <sub>2</sub>	1 %

(if we use oxygen as standard gas).

Measurements have been made with oxygen, water (only to check the method), ozone (O<sub>3</sub>), Freon-12 (CCl<sub>2</sub>F<sub>2</sub>) and Freon-13 (CClF<sub>3</sub>). Ozone was produced from oxygen by using a high electric field strength. By cooling the ozonizer properly, an ozone content of about 8 volume percent was obtained which was determined by a flow measurement in connection with a titration

<sup>1)</sup> CRAIN used a similar method to ours; his results were published at the time we compiled our own.

(absorption of ozone in a solution of potassium iodine, titration by sodium-thiosulphate)..

All measurements have been reduced to 0°C and 760 mm Hg. The  $\delta$ -values are plotted versus an inverse temperature scale in Fig. 3. The slope of the curves is proportional to the dipole moment. A check for the graph may be had at  $T = \infty$  (no dipole movement). That value corresponds to the dielectric constant of the solid state which, however, cannot indiscriminately be compared with values obtained from measurements at lower frequencies (constituting but a lower limit) as there may be absorption bands in between. Our results are summarized in table 1.

Table 1  
(Errors in units of the last decimal)

Gas	Temperature range investigated °K	Dielectric constant $\epsilon$ at 0°C, 760 mm Hg	Dipole moment $\mu \cdot 10^{18}$ cgs units	$\epsilon_{\infty}$ extrapolated, red. to 0°C, 760 mm Hg
H <sub>2</sub> O	320 $\div$ 390	1.01080 $\pm$ 20	1.87 $\pm$ 5	
O <sub>3</sub>	194 $\div$ 360	1.00190 $\pm$ 2	.52 $\pm$ 3	1.00108 $\pm$ 10
CCl <sub>2</sub> F <sub>2</sub>	300 $\div$ 410	1.00355 $\pm$ 2	.55 $\pm$ 3	1.00263 $\pm$ 10
CClF <sub>3</sub>	273 $\div$ 420	1.00257 $\pm$ 2	.39 $\pm$ 2.5	1.00210 $\pm$ 10

## BIBLIOGRAPHY

- [1] G. L. LEWIS and Ch. P. SMYTH, J. Amer. Chem. Soc. 61, 3063 (1939).
- [2] H. E. WATSON, G. G. RAO, K. L. RAMASWAMY, Proc. Roy. Soc. [A] 143, 558 (1934).
- [3] C. P. SMYTH and K. B. McALPINE, J. Chem. Phys. 60, 1 (1935).
- [4] C. P. SMYTH and K. B. McALPINE, J. Chem. Phys. 1, 190 (1933).
- [5] C. M. CRAIN, Phys. Rev. 74, 691 (1948).
- [6] G. W. EPPRECHT, *Measurements on Dielectric Constants and Dipole Moments*, Thesis C. I. T. (1949), unpublished.
- [7] *Tables of Electric Dipole Moments*, Techn. Report II, Lab. for Insulation Research, M. I. T., April, 1947.

## Zusammenfassung

Aus dem Temperaturverlauf der Dielektrizitätskonstanten wurde das elektrische Dipolmoment einiger Gase bestimmt. Das Verfahren benützt den Vorteil hoher Resonanzgüte von Hohlraumresonatoren für 9400 MHz. Während der eine Resonator nacheinander das Versuchsgas und ein bekanntes Vergleichsgas enthält, wird der andere durch Variation des Gasdruckes auf Frequenzkoinzidenz eingestellt. Mit der behelfsmäßig aufgebauten Versuchsanordnung wurde eine Genauigkeit von ca.  $2 \cdot 10^{-6}$  in  $\epsilon$  und ca. 6% für das Dipolmoment erreicht. Der Versuch zeigte aber, daß die Genauigkeit des Verfahrens wesentlich gesteigert werden kann, d.h. auf nahezu  $10^{-7}$  in  $\epsilon$ . Die Methode kann leicht ausgebaut



werden zu Absorptionsmessungen; dazu müssen nur die Verstärker geeichte Eingänge erhalten, damit die Variation der Güte der Resonatoren gemessen werden kann. Ein Nachteil der Apparatur besteht in der fixen Frequenz. Dadurch hat man keine Anhaltspunkte, ob zufälligerweise ein Absorptionsband in der Nähe des Meßpunktes liegt, was die Messungen stark beeinflussen kann. Es würde sich lohnen, zu versuchen, die Methode auszubauen für Messungen auf einem kontinuierlichen Frequenzband z.B. von 3000 ÷ 30 000 MHz.

Die vorliegenden Messungen wurden 1947/48 am California Institute of Technology, Pasadena, durchgeführt, wo sie von R. H. MACNEAL, A. F. FAIRBANKS und HINES unter der Leitung von W. H. PICKERING begonnen worden waren.

(Received: 22. 11. 49.)

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

### Elastische Wellen in porösen Medien

(Vorläufige Mitteilung)

von FRITZ GASSMANN, ETH., Zürich

$\rho$  sei die Dichte,  $E$  der Zugmodul und  $\mu$  der Schubmodul eines homogenen, isotropen Mediums.  $k = E\mu/[3(3\mu - E)]$  ist dann der Kompressionsmodul. Im Medium pflanzen sich elastische Longitudinalwellen mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{[k + (4\mu/3)]/\rho}$  und Transversalwellen mit der Geschwindigkeit  $\sqrt{\mu/\rho}$  fort. Diese Beziehungen gelten auch, wenn das Medium nur makroskopisch homogen und isotrop ist, in Wirklichkeit aber kommunizierende Poren besitzt. Die Moduln  $E$ ,  $\mu$  und  $k$  beziehen sich dann auf Versuche am geschlossenen System, d. h. mit nach außen abgeschlossenen Poren, was die freie Zirkulation der Porenfüllung verhindert. Die entsprechenden Konstanten bei offenen Poren seien  $\bar{E}$ ,  $\bar{\mu}$  und  $\bar{k}$ . Sie geben das elastische Verhalten des Gerüsts an, das entweder ein poröser Festkörper oder ein aus festen Körnern bestehendes Lockermaterial ist. Die elastischen Konstanten des festen Materials, aus dem das Gerüst besteht, seien  $\hat{E}$ ,  $\hat{\mu}$  und  $\hat{k}$ . Die Poren seien mit einer Flüssigkeit oder einem Gas gefüllt mit dem Kompressionsmodul  $\tilde{k}$ .  $n$  sei das Verhältnis des Porenvolumens zum Gesamtvolumen, also die Porosität. Alle elastischen Konstanten beziehen sich auf die kleinen reversiblen Deformationen beim Durchgang elastischer Wellen. Auf Grund der Elastizitätstheorie kann man folgende Beziehung aufstellen:

$$k = \hat{k} \frac{1 + \frac{\bar{k}}{K}}{1 + \frac{\hat{k}}{K}}; \quad \text{wobei} \quad K = \frac{\tilde{k}(\hat{k} - \bar{k})}{n(\hat{k} - \tilde{k})}.$$

Macht man noch die Hypothese  $\mu = \bar{\mu}$ , so lassen sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen im porösen Medium berechnen aus den Elastizitätskonstanten des Gerüsts, des festen Gerüstmaterials und der Porenfüllung.

(Eingegangen: 8. 11. 49.)

# Das Bestimmen von Linienintegralen mit Hilfe eines Integraphen

von HEINZ SCHILT, Biel

Man möchte von einer Kurve  $C$  die folgenden Linienintegrale berechnen:

$$S = \int ds, \quad m = \int x ds, \quad i = \int x^2 ds,$$

worin  $ds$  das Bogenelement der Kurve sei. Diese Integrale lassen sich mit einem Integraphen ausmessen. Da der Integraph aber nur von einer Fläche Momente zeichnen kann, so muß man versuchen, aus der Kurve eine geeignete Fläche zu konstruieren, deren Momente in einem einfachen Zusammenhang zu den Momenten der Kurve stehen. Zu diesem Zweck zeichnen wir Abstandskurven  $C'$  und  $C''$  je im Abstand  $a$  von der Kurve  $C$  und erhalten so einen Streifen der Breite  $2a$  (vgl. Figur). Falls die Kurve Endpunkte hat (nicht geschlossen ist), so grenzen wir den Streifen durch die Kurvennormalen in diesen Endpunkten ab.

Ein Punkt  $P$  der Kurve habe die Koordinaten  $x, y$ ;  $r$  sei der Krümmungsradius der Kurve in diesem Punkte. Die Kurvennormale bilde mit der positiven  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$ ; auf dieser Normalen liege der Punkt  $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y})$  des Flächenstreifens. Der Abstand  $P\bar{P}$  werde mit  $n$  bezeichnet.

Ein Flächenelement  $d\bar{f}$  des Streifens an der Stelle  $\bar{P}$  kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$d\bar{f} = (r + n) dn d\varphi.$$

Berechnet man daraus das Flächenelement  $d\bar{f}$  des Sektors, der durch zwei benachbarte Normalen aus dem Streifen geschnitten wird, so findet man:

$$d\bar{f} = \int_{n=-a}^{+a} (r + n) dn d\varphi = 2ar d\varphi = 2a ds,$$

worin  $ds = r d\varphi$  das Bogenelement der Kurve  $C$  ist. Somit kann die Bogenlänge

$$S = \int ds$$

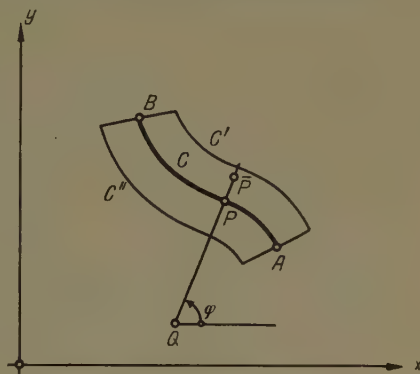
der Kurve  $C$  aus der Fläche  $F$

$$F = \int d\bar{f}$$

berechnet werden. Es ist:

$$S = \frac{F}{2a}.$$

Da  $F$  mit einem Planimeter oder einem Integraphen bestimmbar ist, so ist es nach dieser Formel auch  $S$ .



Kurve  $C$  mit seitlichen Streifen.  
 $PQ = r$ : Krümmungsradius.

### Das statische Moment einer Kurve

Unter dem statischen Moment einer Kurve versteht man den Wert des Integrals  $m = \int x \, ds$ . Man bilde das statische Moment  $M = \int \bar{x} \, d\bar{f}$  des Streifens. Da

$$\bar{x} = x + n \cos \varphi \quad \text{und} \quad d\bar{f} = (r + n) \, dn \, d\varphi$$

ist, erhält man für das statische Moment  $dM$  des Sektors:

$$dM = \bar{x} (r + n) \, dn \, d\varphi = 2a \left( x r \, d\varphi + \frac{a^2}{3} \cos \varphi \, d\varphi \right).$$

Daraus ergibt sich für  $M$ :

$$M = 2a \left( \int x \, ds + \frac{a^2}{3} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \right),$$

wobei  $\varphi_1$  (bzw.  $\varphi_2$ ) der Winkel ist, den die Anfangs- (bzw. End-) Normale mit der positiven  $x$ -Achse einschließt.

Das zweite Glied verschwindet bei einer geschlossenen Kurve und bei Kurven, deren Anfangs- und Endnormalen parallel oder symmetrisch zur  $x$ -Achse sind. Es ist dann

$$\int x \, ds = \frac{M}{2a}.$$

Falls dies nicht zutrifft, muß man das statische Moment  $M_1$  für einen weiteren Streifen bestimmen. Wir wählen einen solchen, dessen Rand einen Abstand  $a_1 = 2a$  von der Kurve  $C$  hat. Durch Kombination von  $M$  und  $M_1$  läßt sich das störende Glied eliminieren, es ist dann:

$$\int x \, ds = \frac{8M - M_1}{12a}.$$

### Trägheitsmoment der Kurve $C$

Das Trägheitsmoment der Kurve  $C$  bezüglich der  $y$ -Achse ist definiert durch

$$i = \int x^2 \, ds.$$

Man bilde

$$I = \int \bar{x}^2 \, d\bar{f}$$

über dem Streifen. Das Trägheitsmoment des Sektors  $dI$  berechnet sich ähnlich wie oben das statische Moment  $dM$ . Wir erhalten:

$$dI = 2a \left[ x^2 r \, d\varphi + \frac{a^2}{3} (r \cos^2 \varphi + 2x \cos \varphi) \, d\varphi \right].$$

Man findet

$$\frac{I}{2a} = \int x^2 \, ds + a^2 k.$$

$k$  ist eine Länge, die nicht von der Streifenbreite abhängt und im allgemeinen nicht verschwindet. Um  $k$  zu eliminieren, bestimmen wir das Trägheitsmoment  $I_1$  des Streifens mit doppelter Breite.

Wie oben findet man

$$\int x^2 \, ds = \frac{8I - I_1}{12a}.$$

Da man gemischte Momente mit dem Integrphen bestimmen kann, so gelingt es, auch Kurvenmomente von der Form

$$\int x y ds$$

mit dem Integrphen auszuwerten.

Die Methode des Streifens, wie sie hier entwickelt wurde, geht nur so lange, als  $a$  (bzw.  $a_1$ ) kleiner ist als  $r$ . Insbesondere versagt sie dort, wo die Kurve  $C$  eine Ecke hat. Man kann sich jedoch so helfen, daß man die ursprüngliche Kurve an der Ecke teilt. Die Streifen der beiden Teilkurven überlappen sich dort, was aber das Integrieren mit dem Integrphen nicht hindert.

(Eingegangen: 18. 10. 49.)

### Varia – Miscellaneous – Divers

#### Professor Dr. L. Prandtl

Am 4. Februar 1950 vollendete Prof. Dr. LUDWIG PRANDTL, Göttingen, sein 75. Lebensjahr. Die Leser unserer Zeitschrift wissen, welchen außerordentlichen Einfluß seine Forschungen auf die Entwicklung der angewandten Mechanik ausgeübt haben und zweifellos weiterhin ausüben werden. Wir wünschen dem Jubilar aufs herzlichste, daß er sich noch lange Jahre und bei guter Gesundheit der Auswirkungen seiner erfolgreichen Tätigkeit erfreuen möge.

*Redaktor und Redaktionskommission*

#### Wissenschaftliche Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 16. bis 19. April 1950 in Darmstadt

An dieser wissenschaftlichen Tagung wird von in- und ausländischen Rednern u. a. referiert werden über moderne Rechenhilfsmittel (Integrieranlagen und Rechenautomaten) sowie Tabellierungen. Anmeldungen (insbesondere auch für Vorträge) sind zu richten an: Herrn Prof. Dr. A. WALTHER, Fichtestraße 32, Darmstadt (Telephon 936).

#### International Conference on Semi-Conductors in Reading (Great Britain)

A conference on the Properties of Semi-conducting Materials will take place at the University of Reading from July 10<sup>th</sup> to 15<sup>th</sup> incl. 1950. The conference, which is assisted by UNESCO, will be under the auspices of the International Union of Physics, in cooperation with the Royal Society, and will be organized by Prof. N. F. MOTT and Prof. R. W. DITCHBURN. Leading research workers from Czechoslovakia, France, Netherlands, Sweden, Switzerland, the U.S.A., and Great Britain have accepted invitations to contribute papers. Their subjects include the conductive properties of non-metallic solids, photo-conduction, barrier layer rectifiers, crystal triodes, etc., and the relevant theoretical issues. The Proceedings of the conference will be published in book form. A General Prospectus can be obtained from the Secretary, Dr. H. K. HENISCH, Department of Physics, The University, Reading, England.



### **The International Congress of Mathematicians, Cambridge (Mass., U. S. A.), 1950**

Under the auspices of the American Mathematical Society, the International Congress of Mathematicians will be held in Cambridge (Mass.) from August 30 to September 6, 1950. Main lectures will be presented on recent improvement in the fields of algebra, analysis, applied mathematics and topology. For brief reports six sections will be established.

Enquiries should be addressed to the Secretariat of the International Congress of Mathematicians, Low Memorial Library, 531 West 116<sup>th</sup> Street, New York City 27, N.Y., U.S.A.

### **Union Radio-Scientifique Internationale (U. R. S. I.)**

La prochaine Assemblée générale de l'Union Radio-Scientifique Internationale, invitée par le Comité national suisse de l'U. R. S. I., aura lieu du 11 au 23 septembre 1950 à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich, sous la présidence de Sir EDWARD APPLETON.

L'Union se divise en sept commissions, qui sont les suivantes:

- 1<sup>o</sup> Mesures et étalonnages,  
présidée par D<sup>r</sup> J. H. DELLINGER.
- 2<sup>o</sup> Troposphère et propagation des ondes,  
présidée par D<sup>r</sup> CH. BURROWS.
- 3<sup>o</sup> Ionosphère et propagation des ondes,  
présidée par Sir EDWARD APPLETON.
- 4<sup>o</sup> Atmosphériques d'origine terrestre,  
présidée par Prof. H. NORINDER.
- 5<sup>o</sup> Bruits radio-électriques d'origine extra-terrestre,  
présidée par D<sup>r</sup> D. F. MARTYN.
- 6<sup>o</sup> Ondes et circuits,  
présidée par Prof. D<sup>r</sup> B. VAN DER POL.
- 7<sup>o</sup> Electronique,  
présidée par D<sup>r</sup> G. LEHMANN,

dont les sessions auront lieu séparément en principe.

L'Assemblée générale aura pour but de discuter des sujets scientifiques se rapportant aux différentes commissions.

Des renseignements complémentaires peuvent être obtenus par le Secrétariat général de l'Union Radio-Scientifique Internationale, 42, rue des Minimes, Bruxelles (Belgique). Les intéressés habitant la Suisse sont priés d'adresser leurs demandes au Secrétariat du Comité d'organisation de la IX<sup>e</sup> Assemblée générale de l'U. R. S. I., 7, Sternwartstraße, Case Postale, Zurich 23 (Suisse) – Téléphone (051) 327330.

**Photoelectricity and its Application.** By V. K. ZWORYKIN and E. G. RAMBERG (John Wiley & Sons, Inc., New York 1949). 494 pp., 381 Fgs.; \$7.50.

Der in den Kreisen der modernen Nachrichtentechniker sehr wohl bekannte Autor Dr. V. K. ZWORYKIN, Direktor der RCA., legt mit dem vorgelegten Buch

den Lesern die 3. Auflage seiner Photoelectricity in die Hände. Seit dem Erscheinen der 2. Auflage im Jahre 1934 haben sich sowohl die grundsätzlichen Erkenntnisse als auch die Anwendungen dieses Wissensgebietes sehr stark erweitert. Dieser Umstand hat in der neuen Auflage gebührend Berücksichtigung gefunden. Jeder Ingenieur oder Physiker, der mit dem Problem des Photoeffektes zu tun hat, wird über die Hilfe, die ihm ZWORYKINS Buch zu bringen vermag, begeistert sein.

Der Inhalt ist in 20 Kapitel gegliedert und umfaßt neben einer kurzen historischen Einleitung, einer knapp gehaltenen allgemeinen Theorie vor allem die Beschreibung der Eigenschaften und der Herstellung von modernen Photozellen. Besonders ausführlich werden auch die über weite Gebiete der Technik zerstreuten Anwendungen behandelt. Um nur einiges aufzuzählen: Meßgeräte, Anwendung der Photozellen in der Schallwiedergabe, in der Fernstechnik, zur Übertragung von Signalen mit Hilfe von Lichtstrahlen, die Anwendung für Verkehrskontrolle, Sicherheitseinrichtungen usw. In einem letzten Kapitel ist auch ein kleiner Ausblick über die zukünftige Entwicklungsmöglichkeit der Photozelle zusammengefaßt.

Neben der untadeligen Redaktion, die dem Buche zuerkannt werden muß, und dem äußerst sorgfältig bearbeiteten und reichhaltigen Literaturverzeichnis sei auch die ansprechende äußere Aufmachung, wie Qualität des Papiers, des Druckes und des Einbandes, besonders erwähnt.

Das Buch gehört zweifellos in die Handbibliothek aller Leute, die sich mit dem Photoeffekt und seinen Anwendungen beschäftigen.

*E. Baumann*

**Grundzüge der angewandten Geoelektrik.** Von V. FRITSCH (Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung, Wien 1949). 417 S., 408 Abb.; sFr. 58.70.

Das Buch gibt eine Übersicht über elektrische Eigenschaften von Mineralien und Gesteinen und ihre Bestimmung, über die Gleichstrom-, Niederfrequenz- und Hochfrequenzmethoden zur Sondierung des Untergrundes und ihre Anwendung auf die Geologie, Lagerstättenkunde, Baugrundforschung, Hydrographie, Glaziologie und Blitzforschung. Es lag nicht in der Absicht des Verfassers, die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Geoelektrik systematisch zu entwickeln. Das Werk ist daher kein Lehrbuch für den Anfänger. Hervorgegangen aus einer ausgedehnten geoelektrischen Praxis des Verfassers, ist es hingegen dem Geophysiker wie dem interessierten Geologen und Baufachmann ein ungemein schätzenswerter Wegweiser durch die beinahe verwirrende Fülle verschiedener Methoden und Apparaturen, die in der Geoelektrik verwendet werden. Es gibt, unterstützt durch das umfangreiche, dem Benutzer hochwillkommene Literaturverzeichnis, einen guten Einblick in den heutigen Stand der Geoelektrik, sowie mannigfache Anregungen und, oft gleichsam nebenher in den Text eingestreut, zahlreiche wertvolle praktische Winke.

*F. Gäßmann*

**Scientific Foundations of Vacuum Technique.** By S. DUSHMAN (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949). 882 pp, 324 Figs; \$15.—.

Die Hochvakuumtechnik hat in den letzten Jahren gewaltig an Bedeutung gewonnen. Sie ist in den verschiedensten Zweigen der Technik zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Neben der Hochvakuumröhrentechnik sei an die folgenden Anwendungen erinnert: Hochvakuumaufdampfapparaturen zur Herstellung von Aufdampfschichten für optische Anwendungen wie Spiegel, reflexvermindernde Belege, Interferenzfilter; Hochvakuumschmelzöfen für die Metall-

urgie; Hochvakuum-Dehydrieranlagen für Blutplasma und Penicillinherstellung. Diese drei Beispiele zeigen die vielseitigen Anwendungsmöglichkeiten der modernen Hochvakuumtechnik.

DUSHMAN ist denjenigen, die sich mit Hochvakuumfragen befassen, bereits bekannt durch sein 1922 erschienenes Buch *Production and Measurement of High Vacuum*, welches in die deutsche Sprache übersetzt worden ist. Der Leiter der Versuchslaboratorien der General Electric Company hat nun dieses Gebiet neu bearbeitet. Das vorliegende Werk umfaßt dabei die gesamten modernen Kenntnisse in der Hochvakuumtechnik.

Als erstes behandelt der Autor die kinetische Gastheorie und die Erscheinungen bei Strömungen von Gasen durch Röhren und aus Öffnungen bei verschiedenen Drucken. Beides bildet die Grundlage für das Verständnis der Hochvakuumherzeugung, der Druckmessung und schließlich der Vorgänge in einem Hochvakuumsystem.

Es folgt eine ausgezeichnete Darstellung der Entwicklung auf dem Gebiete der Hochvakuumumpfen. Sie enthält alle wichtigen Daten und Angaben über viele heute verwendete Pumpentypen (amerikanische Erzeugnisse). Eingehend werden die Hochvakuummeßgeräte behandelt und ihre speziellen Anwendungsmöglichkeiten diskutiert. Im selben Kapitel ist auch eine Übersicht über die modernen Lecksuchgeräte gegeben, wie z. B. das Massenspektrometer.

Drei Kapitel sind der Wechselwirkung zwischen Gasen und Dämpfen einerseits und den festen Körpern andererseits gewidmet. Hier findet man Theorie und Datensammlung über Gas- und Dampfabsorption unter verschiedenen Bedingungen, wie verschiedenen Drucken und Temperaturen. Es wird insbesondere auf die Absorptionserscheinungen bei Metallen, Kohle, Silikaten (einschließlich Glas) und Zellulose eingegangen. Hierauf folgt die Behandlung der Diffusion von Gasen durch Metalle bei niedrigen Drucken sowie die Gasabgabe durch die verschiedenen Metalle. Eine Anwendung dieser Erscheinungen besteht in den Reinigungsmethoden für Gase durch die Getterung.

Die mit der Verdampfung von Metallen und Legierungen in Zusammenhang stehenden Probleme werden eingehend vom theoretischen Standpunkt sowie von der Praxis aus behandelt. Hier findet man eine Großzahl von Tabellen wichtiger Daten. Schließlich werden die Dissoziationserscheinungen bei Oxyden, Hydriden und Nitriden besprochen sowie die Oxydationsvorgänge behandelt.

Das Werk ist eine vollständige Bearbeitung der modernen Hochvakuumtechnik. Die klare und übersichtliche Behandlung des Stoffes zusammen mit der Reichhaltigkeit an Tabellen und Daten macht es zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel dieser Technik. Die große Zahl von Literaturhinweisen (über 1000) und von Namen der auf diesem Gebiete tätigen Fachleute zeigt, daß versucht worden ist, die Arbeiten aller Forscher auf diesem Gebiete zu berücksichtigen und zu einem Ganzen zu vereinigen.

Das Werk muß jedem, der sich mit Hochvakuumproblemen beschäftigt oder sich in diese Technik einarbeiten will, voll empfohlen werden, denn es bildet eine Fundgrube wichtiger Daten und Anregungen.

N. Schaetti

**Grundzüge der theoretischen Logik.** Von D. HILBERT und W. ACKERMANN (Verlag Springer, Berlin 1949). 155 S.; DM 16.50.

Dieses ursprünglich aus den Ausarbeitungen Hilbertscher Vorlesungen hervorgegangene und von WILHELM ACKERMANN zu einem Ganzen abgerundete und inhaltlich bereicherte Lehrbuch hat in seinen beiden ersten Auflagen (erschienen 1928 und 1938) bei dem an den mathematischen Grundlagenproblemen inter-

essierten Publikum lebhaften Anklang gefunden und sich auch als Leitfaden für Vorlesungen bewährt, so daß das Erscheinen der dritten Auflage lebhaft begrüßt werden wird.

Der Charakter des Buches ist zugleich ein wissenschaftlich-expositorischer und ein pädagogischer. Ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen, führt es den Leser schnell in die Fragestellungen und Methoden der mathematischen Logik ein. Dabei handelt es sich teils um direkte Entscheidungsverfahren, teils um die Formalisierung des logischen Schließens durch axiomatisch gefaßte Regeln des kalkülmäßigen Operierens. Die Betrachtungen werden allenthalben, ausgehend von der Orientierung am Inhaltlich-Logischen, bis zur theoretischen Systematik geführt.

Die Gliederung des Buches in Kapitel erfolgt nach den Gebieten des logischen Kalküls: Aussagenkalkül, Klassenkalkül, engerer Prädikatenkalkül, erweiterter Prädikatenkalkül. Durch eine geschickte Form der Darstellung, welche jede Weitschweifigkeit vermeidet, wird die Darbietung eines reichhaltigen Stoffes auf einem verhältnismäßig kleinen Raum und mit einer nur sehr maßvollen Anwendung von Symbolik ermöglicht.

Die neue Auflage bringt gegenüber der vorigen erstens einige Verbesserungen und Ergänzungen im einzelnen und ferner inhaltlich Neues: 1. die Darlegung eines (bisher wohl nicht bekannten) Entscheidungsverfahrens für den Klassenkalkül, 2. eine genauere Behandlung des Stufenkalküls, 3. eine Schlußbetrachtung über die Möglichkeiten, den Stufenkalkül durch andere Arten der Erweiterung des Prädikatenkalküls zu ersetzen.

*P. Bernays*

**Einführung in die Physik der festen Erde.** Von H. BERG (Verlag S. Hirzel, Zürich 1949). 295 S., 107 Abb.; sFr. 16.—.

Das Buch gibt in gedrängter Form eine gediegene Einführung in die wichtigsten physikalisch-mathematischen Methoden, die bis heute zur Erforschung von Form und Struktur des festen Erdkörpers entwickelt worden sind. Dem historischen Ablauf entsprechend, werden in den ersten Abschnitten die astronomisch-geodätischen Meßverfahren behandelt und die mit diesem Verfahren erzielten Resultate dargestellt. Im nachfolgenden Abschnitt werden Methoden und Ergebnisse der Schweremessungen besprochen. Dabei legt der Verfasser besonderes Gewicht auf sorgfältige Erklärungen der wichtigsten Grundbegriffe, wie Potential, Geoid, Isostasie usw. Der nachfolgende Abschnitt gibt eine Übersicht über die Methoden und Resultate der Erdbebenforschung, d. h. der sogenannten großen Seismik. Nach einer kurzen Einführung in die Erdbebengeographie und Erdbebenstatistik wird gezeigt, wie die von den Erdbebenherden ausgestrahlten Erdbebenwellen beobachtet und heute interpretiert werden. Aus den an der Erdoberfläche beobachteten Laufzeitkurven der verschiedenen Wellentypen ergeben sich wertvolle Einblicke in die Struktur des Erdinneren. Mit Berücksichtigung der wichtigsten Forschungsergebnisse aus der Geochemie werden dann im nachfolgenden Abschnitt die heute zur Diskussion stehenden Hypothesen über den Aufbau und die Struktur des Erdkörpers einander gegenübergestellt. Das Schlußkapitel gibt eine kurze Übersicht über die Erscheinungen des Erdmagnetismus und deren Zusammenhang mit solaren Vorgängen. Die Methoden der angewandten Geophysik zur Erforschung der äußersten Erdkrustenpartien werden in den entsprechenden Abschnitten jeweils nur kurz gestreift.

Das Buch eignet sich vor allem für Geologen und Geographen, die sich über die wichtigsten Methoden und Forschungsergebnisse auf dem weiten Gebiet der Geophysik orientieren möchten. Das Werk wird aber auch allen an der Geophysik interessierten Lesern viel Anregung bieten.

*E. Wanner*



**Tafeln elementarer Funktionen** (Tables of Elementary Functions). Von F. EMDE (Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1948). 181 S., 83 Abb.; \$3.50.

Im Jahre 1938 wurde das bekannte Tabellenwerk von JAHNKE-EMDE zum erstenmal aufgeteilt in einen Band über elementare Funktionen (1. Aufl. 1940) und einen solchen über höhere Funktionen. Die vorliegende zweite Auflage ist ein fast unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1940. Das Nomogramm auf Seite 10 ( $z = x^y$  in logarithmischer Darstellung für  $-1 < y < +1$ ) ist ersetzt worden durch ein Relief der Funktion  $z^z$ . Verschiedene Druckfehler in den Tabellen sind korrigiert. Im Anhang S. 165, Zeile 16 von oben sollte gelesen werden: «wenn  $x = x_0 + n h$  ist, wobei  $h$  das Tabulierungsintervall bedeutet, also....»

**Tafeln höherer Funktionen** (Tables of Higher Functions). Von E. JAHNKE und F. EMDE (Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1948). 296 S., 177 Abb.; \$3.60.

Diese neueste Ausgabe des berühmten «JAHNKE-EMDE» enthält folgende neuen Tabellen:

1. Eine Erweiterung der Tafel des Fehlerintegrals.
2. Funktionen des parabolischen Zylinders (RUSSEL-KERRIDGE).
3. Laguerresche Funktionen (TRICOMI).
4. Kugelfunktionen 2. Art (VANDREY).
5. Unvollständige Angersche und Webersche Zylinderfunktion (P. und E. BRAUER).
6. Zylinderfunktionen  $J(iy)$  und  $H^{(1)}(iy)$  für die Ordnungen  $1/3$  und  $2/3$  (P. und E. BRAUER) statt der früheren Tafeln von DINNIK.

Weggelassen sind die früheren Tafeln der Ableitungen des Fehlerintegrals und der Weierstraßschen elliptischen Funktion im äqui-anharmonischen Fall.

Außerdem ist der Formeltext in mancher Hinsicht ausgestaltet worden (z. B. Debyesche anfangskonvergente Reihen der Zylinderfunktionen).

Wie der Verfasser im Vorwort schildert, war diese 4. Auflage im Jahre 1944 bereits fertig, wurde aber durch Kriegsereignisse in der Buchbinderei vernichtet. Erst 1948 konnte das damalige Manuskript neu abgedruckt werden. Infolgedessen sind manche Fehler in den Tabellen, über welche die Zeitschrift MTAC. (*Mathematical Tables and other Aids to Computation*, speziell Bd. 3, Nr. 25, S. 365) in der Zwischenzeit berichtet hat, stehengeblieben. Aus demselben Grund sind die Literaturangaben auf S. 293 zu ergänzen (etwa durch FLETSCHER, MILLER, ROSENHEAD: *An Index of Mathematical Tables* [London 1946] und durch die MTAC.).

E. Stiefel





Gerätebauanstalt Balzers

## Hochvakuum- Bedampfungsanlagen

zur Herstellung dünnster Schichten im Vakuum. Besonders geeignet zur Optikvergütung, Herstellung hochwertiger Spiegel und Beschattung von Präparaten für Elektronenmikroskopie. Dreistufige Öl-Diffusionspumpe hoher Saugleistung, zweistufige Vorvakuumpumpe, Vakuummeßgeräte für  $10^{-5}$  bis 1 mmHg. Unter Vakuum rotier. Drehvorrichtung zur Erzielung gleichmäßiger Schichten.

Verkaufsorganisation

Trüb, Täuber & Co. AG., Zürich

Fabrik elektrischer Meßinstrumente  
und wissenschaftlicher Apparate

# PHYSIKALISCHE *Blätter*

### berichten

mit wissenschaftlicher  
Sorgfalt über die  
gesamte Physik  
und ihre Randgebiete

### diskutieren

strittige Fragen  
und  
problematische  
Anschauungen

### unterrichten

über letzte  
Erkenntnisse und  
neueste  
Forschungsergebnisse

### vertreten

eine freie Meinung  
zur  
Wissenschaftspolitik  
in Ost und West

*Wer sie kennenlernen will, erhält auf Wunsch kostenlos ein Probeheft*

PHYSIK  
PHYSIK-VERLAG **V** MOSBACH · BADEN

Deutschland

# Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

---

## *Mathematik*

- FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes . . . geb. Fr. 22.50  
HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände . . . geb. je Fr. 44.—  
LINDER, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure . . . geb. Fr. 18.50  
LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendung . . . geb. Fr. 48.—  
OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band I . . . geb. Fr. 47.50  
SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I . . . geb. Fr. 54.—  
STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . geb. Fr. 28.50  
ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik . . . geb. Fr. 27.—  
VOELKER, D., und DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Demnächst  
CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie. In Vorbereitung  
CARATHÉODORY, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung. In Vorbereitung  
DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation. Demnächst

## *Physik und Astronomie*

- GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellenmechanik . . . geb. Fr. 29.50  
NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung. . . . . geb. Fr. 32.—  
VONDER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen . . . geb. Fr. 36.—  
WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik . . . geb. Fr. 47.50  
Kongreßbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik und theoretische Physik, Basel 1949. 248 S. mit vielen Illustrationen. Broschiert . . . Fr. 16.—

## *Ingenieurwissenschaften*

- BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert . . . Fr. 24.50  
JAEGER, CH.: Technische Hydraulik . . . geb. Fr. 48.50  
KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge der Theorie der Wechselströme und des einphasigen Transformators. . . . . geb. Fr. 26.50  
Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen. In Vorbereitung  
MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper . . . geb. Fr. 36.—  
Band II: Dynamik der starren Körper . . . geb. Fr. 32.50  
SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie . . . geb. Fr. 14.50  
STRÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I . . . geb. Fr. 38.50  
RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik . . . geb. Fr. 29.—

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

---

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

## *Zwei Neuerscheinungen*

P. GOMBÁS

Direktor des physikalischen Institutes der Universität  
für technische Wissenschaften in Budapest

### **Theorie und Lösungsmethoden des Mehnteilchenproblems der Wellenmechanik**

268 Seiten mit 20 Figuren. In Ganzleinenband Fr. 29.50

*Gekürzter Inhalt:* 1. Teil: Allgemeine wellenmechanische Theorie des Mehnteilchenproblems. Allgemeine Grundlagen – Zusammengesetzte Systeme – Atome – Moleküle – Große Anzahl gleicher Teilchen – Statistische Behandlungsweise – Wellenquantelung.

2. Teil: Lösungsmethoden des wellenmechanischen Mehnteilchenproblems. Das Variationsverfahren (allg. Grundlagen, Atomprobleme, Molekülprobleme, Störungsrechnung) – Die Methoden des «self-consistent field» – Die statistische Methode.

Der Stoff ist möglichst leicht verständlich, lehrbuchartig in einer Weise dargestellt, die es nicht nur den Studierenden der theoretischen Physik, sondern auch den auf den Nachbargebieten arbeitenden Studierenden und Forschern – in erster Linie den experimentellen und technischen Physikern sowie Chemikern – mit geringer Mühe ermöglicht, in dieses wichtige Gebiet der theoretischen Physik einzudringen.

ALEXANDER A. RUSTERHOLZ

Röhrenfabrik der AG. Brown, Boveri & Cie., Baden (Schweiz)

### **Elektronenoptik**

#### **Band I – Grundzüge der theoretischen Elektronenoptik**

249 Seiten mit 118 Figuren. In Ganzleinenband Fr. 29.–

*Inhalt:* Das Elektron im elektrischen und im magnetischen Feld – Der elektronenoptische Brechungsindex – Rotationssymmetrische Felder – Die Elektronenbahnen in rotationssymmetrischen Feldern – Elektrische Elektronenlinsen – Magnetische und elektrisch-magnetische Elektronenlinsen – Die Bildfehler – Zweidimensionale Felder. Elektronenprismen – Elektronenspiegel – Schlußbemerkungen.

Die lehrbuchartige Behandlung des Stoffes vermittelt eine kurzgefaßte exakte Darstellung derjenigen Tatsachen und Methoden der theoretischen Elektronenoptik, welche dem Forscher und dem Studierenden zum Verständnis der Wirkungsweise elektronenoptischer Geräte und zur richtigen Dimensionierung elektronenoptischer Anordnungen bekannt sein müssen. Zahlreiche Literaturhinweise sollen, falls sich der Leser über einzelne Fragen eingehender orientieren möchte, einen bequemen Zugang zur Originalliteratur bieten.

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*

**VERLAG BIRKHÄUSER BASEL**



HELVETICA PHYSICA ACTA  
Volumen XXIII, Supplementum III

---

## **Internationaler Kongreß über Kernphysik und Quantenelektrodynamik**

Herausgegeben von der Kommission der Internationalen Konferenz über  
Kernphysik und theoretische Physik vom 5. bis 9. September 1949 in Basel

Präsident: Prof. Dr. P. Huber – Redaktor: Prof. Dr. M. Fierz

248 Seiten mit vielen Illustrationen. Broschiert Fr. 16.–

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

---

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL

## **Archiv der elektrischen Übertragung**

A. E. Ü.

*Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. e. h. Dr. Karl Willy Wagner*

Das Archiv der elektrischen Übertragung (A.E.Ü.) behandelt die physikalischen und technischen Probleme der elektrischen Übertragungstechnik im weitesten Sinne. Sein Arbeitsprogramm umfaßt die dahin gehörenden Aufgaben der elektrischen Energieübertragung auf Leitungen und mit elektrischen Wellen, der Fernsprech-, Telegraphen- und Funktechnik, der Hochfrequenztechnik, des Rundfunks und des Fernsehens; ferner die Probleme der Regeltechnik.

Monatlich ein Heft • Vierteljährlich DM 15.50

Prospekte und Probehefte bitten wir unter Bezug auf diese Anzeige anzufordern beim

*Verlag des Archivs der elektrischen Übertragung*

(16) Wiesbaden-Biebrich, Mühlweg 2

# Millimeter- und Logarithmenpapiere

ED. AERNI-LEUCH, BERN  
Fabrikation technischer Papiere

---

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFTEN  
aus dem Verlag Birkhäuser, Basel

---

## Helvetica Physica Acta

Edita a Societate Physica Helvetica

Redaktionskomitee: P. HUBER, Basel – J. ROSSEL, Neuchâtel – A. MERCIER,  
Bern – A. FERRIER, Lausanne – P. SCHERRER, Zürich – J. WEIGLE, Genève.  
Redaktion: M. FIERZ, Universität Basel

Abonnementspreis pro Jahr für Mitglieder der Schweizerischen physikali-  
schen Gesellschaft: Inland Fr. 22.–, Ausland Fr. 28.–; für Nichtmitglieder:  
Inland Fr. 32.–, Ausland Fr. 38.–; Einzelnummer für Mitglieder Fr. 4.50;  
für Nichtmitglieder Fr. 7.–. Jährlich 6–8 Hefte von zusammen 500–600 Seiten

## Elemente der Mathematik

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare  
Patronat: G. DUMAS, Lausanne – H. FEHR, Genf – R. FUETER, Zürich –  
H. JECKLIN, Zürich

Redaktion: L. LOCHER-ERNST – E. VOELLMY – E. TROST

Abonnementspreis: jährlich Fr. 7.–, Ausland Fr. 10.–; Einzelnummer  
Fr. 1.80. Erscheint alle 2 Monate

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

---

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



